

Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie

Herausgegeben
von der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft
unter der Redaktion von

Dr. Carl W. Correns

Professor an der Universität Rostock

Zweiundzwanzigster Band

Erster Teil

Mit 38 Abbildungen im Text

Berlin W 35

Verlag der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft e. V.

Buchhändlerischer Vertrieb durch die Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena

1937

Die Deutsche Mineralogische Gesellschaft (E. V.) sucht die Mineralogie, Kristallographie und Petrographie in Forschung und Lehre zu fördern, besonders auch die wissenschaftlichen Beziehungen ihrer Mitglieder zu pflegen. Alljährlich veranstaltet sie eine Versammlung mit Vorträgen, Berichten und Exkursionen; ferner gibt sie als eigenes Organ die Zeitschrift „Fortschritte der Mineralogie usw.“ heraus. Die älteren Bände stehen den Mitgliedern zu Vorzugspreisen zur Verfügung. Diese umfangreiche Veröffentlichung bringt hauptsächlich Darstellungen der Fortschritte, die auf verschiedenen Teilgebieten in der letzten Zeit gemacht worden sind, und wird den Mitgliedern unentgeltlich übersandt. Der Jahresbeitrag beträgt gegenwärtig 10 RM.

Der Vorstand besteht zur Zeit aus folgenden Herren:

Vorsitzender: Professor Dr. **Paul Ramdohr**, Berlin N 4, Invalidenstr. 43

Schriftführer: Professor Dr. **E. Tröger**, Mineralogisches Institut der Technischen Hochschule, Dresden.

Schatzmeister: Dr. **R. Thost**, Berlin W 35, Koester Ufer 17.

Zahlungen sind zu richten an den Schatzmeister Dr. R. Thost, oder

an die **Deutsche Mineralogische Gesellschaft, Berlin W 35,**
Postscheckkonto Berlin NW 7, Nr. 112678, oder

Bankkonto Nr. 2227/52 bei der Dresdner Bank, Depositenkasse 52,
Berlin W 9, Potsdamer Str. 20.

Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie

Herausgegeben
von der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft
unter der Redaktion von

Dr. Carl W. Correns

Professor an der Universität Rostock

Zweiundzwanzigster Band

Erster Teil

Mit 38 Abbildungen im Text

Berlin W 35

Verlag der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft e. V.

Buchhändlerischer Vertrieb durch die Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena

1937

Alle Rechte vorbehalten

Optische Meßmethoden im polarisierten Auflicht insonderheit zur Bestimmung der Erzminerale, mit einer Theorie der Optik absorbierender Kristalle

Erster Teil:

Mikroskopische Methoden bei senkrechtem Lichteinfall

Von

Max Berek,

Wetzlar

Mit 38 Abbildungen im Text

Inhalt

| | Seite |
|---|-------|
| Einleitung | 2 |
| I. Methodischer Teil | 4 |
| A. Grundlagen der Optik absorbierender Kristalle | 4 |
| 1. Fortpflanzung und Polarisation des Lichts. | 4 |
| 2. Reflexion des Lichts. | 6 |
| B. Erscheinungen im Auflicht | 8 |
| 1. Im unpolarisierten Licht | 8 |
| 2. Im polarisierten Licht | 9 |
| a) Ohne Analysator | 9 |
| b) Zwischen parallelen Nicols | 9 |
| c) Zwischen gekreuzten Nicols | 10 |
| 3. Einfluß der Immersion | 17 |
| C. Quantitative Bestimmungen zwischen gekreuzten Nicols. | 18 |
| 1. Allgemeines über die Meßvorrichtung | 18 |
| 2. Beschreibung der Apparatur | 20 |
| 3. Vorteile der konoskopischen Beobachtung. | 23 |
| 4. Justierung | 24 |
| 5. Nullagen des Analysators und des Glimmerplättchens | 24 |
| 6. Prüfung der optischen Elemente auf Spannungsfreiheit | 25 |
| 7. Vorgang der Messung. | 25 |
| 8. Verwendung der Meßergebnisse | 26 |
| 9. Auswertung der Anisotropieparameter | 30 |
| 10. Bestimmung der Brechungsindizes bei sehr schwacher Absorption | 33 |
| D. Messung des Reflexionsvermögens | 34 |
| 1. Allgemeines | 34 |
| 2. Subjektive Methode | 36 |
| 3. Sog. objektive Methode | 40 |
| E. Messung der Absorptionskoeffizienten im durchfallenden Licht | 42 |

| | Seite |
|---|-------|
| II. Theoretischer Teil | 44 |
| A. Komplexe Größen | 44 |
| B. Das Übertragungsprinzip | 47 |
| C. Fortpflanzung und Polarisierung des Lichts in beliebig stark absorbierenden Kristallen | 49 |
| 1. Die komplexe Indikatrix | 49 |
| 2. Die zu einer beliebigen Fortpflanzungsrichtung im Kristall gehörigen Brechungsindizes, Absorptionskoeffizienten, Schwingungsrichtungen und Schwingungszustände | 52 |
| 3. Die Fortpflanzungsrichtung des Lichts liegt in einer optischen Symmetrieebene des Kristalls | 58 |
| 4. Singuläre Richtungen der Lichtfortpflanzung | 61 |
| D. Fortpflanzung und Polarisierung des Lichts in schwach absorbierenden Kristallen | 67 |
| E. Reflexion des Lichts | 74 |
| 1. Vollkommen durchsichtige Kristalle | 74 |
| 2. Absorbierende Kristalle | 75 |
| 3. Die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols | 77 |
| 4. Die Erscheinungen zwischen nicht völlig gekreuzten Nicols | 80 |
| 5. Die Erscheinungen im polarisierten Licht zwischen parallelen Nicols und solche ohne Analysator | 82 |
| 6. Theorie der Meßmethoden zwischen gekreuzten Nicols | 85 |
| 7. Einfluß der Oberflächenschichten | 94 |
| Alphabetisches Sachregister | 104 |

Einleitung

Während die Metallographie sich im wesentlichen zu einer Gefügekunde der metallischen Werkstoffe entwickelt hat, sehen wir die Mikroskopie der Erzminerale im Auflicht bereits in ihren Anfängen in Wege einlenken, die durchaus parallel gehen zu denen, die uns aus der mikroskopischen Physiographie und Diagnostik durchsichtiger Minerale geläufig sind, und die gekennzeichnet werden durch das Streben nach quantitativen Bestimmungsmethoden. Dieses Ziel ist schon im Jahre 1922 in dem ersten in deutscher Sprache geschriebenen zusammenfassenden Werk über diesen neuen Wissenszweig von H. SCHNEIDERHÖHN klar hervorgehoben worden. Die grundlegenden Tatsachen der Fortpflanzung und der Polarisierung des Lichts in absorbierenden Kristallen waren bereits einige Jahrzehnte vorher namentlich durch die Arbeiten von P. DRUDE und W. VOIGT entwickelt worden und hatten im Jahre 1906 in dem Lehrbuch der Kristalloptik von F. PÖCKELS eine übersichtliche Zusammenfassung erfahren. Diese Ar-

beiten, auch heute noch wegweisend für die mathematische Behandlungsweise der Probleme, sind ausschließlich unter physikalisch interessierenden Gesichtspunkten entstanden. Inwieweit die in ihnen entwickelten Methoden zur Bestimmung der Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten auch im Bereiche der Mikroskopie anwendbar sind, ist noch nicht so eingehend untersucht, daß hierüber ein abschließendes Urteil gegeben werden könnte. In dieser Mitteilung werden daher vorerst nur solche Methoden behandelt, die senkrechten Lichteinfall benutzen.

Derartige mikroskopische Meßmethoden hat zuerst JOH. KÖNIGSBERGER beschrieben. Später hat auch F. E. WRIGHT solche Methoden angegeben. Es scheinen aber diese Meßverfahren wenig benutzt worden zu sein. Die Sicherheit und die Deutung der Meßergebnisse begegnete, worauf auch diese Autoren zum Teil selbst hinwiesen, manchen Schwierigkeiten. Theoretisch waren auch grundlegende Erscheinungen in wesentlichen Dingen nicht hinreichend geklärt. Selbst eine so prinzipielle Angelegenheit wie die Deutung der Erscheinungen, welche anisotrope Kristalle zwischen gekreuzten Nicols im Auflicht im allgemeinsten Falle darbieten, hat erst kürzlich ihre vollständige Lösung gefunden. Mit der Erweiterung der Theorie ist die Entwicklung der Meßverfahren Hand in Hand gegangen. Die älteren Methoden können heute durch einfachere und vollständigere ersetzt werden. Ein gewisser in diesen Untersuchungen erreichter Abschluß rechtfertigt es, wenn ich dem Wunsche der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft nachkomme und die Ergebnisse in zusammenfassender Form darstelle.

Der erste Teil dieser Abhandlung enthält alles, was der vorwiegend praktisch interessierte Mikroskopiker zur Ausführung seiner Arbeiten wissen muß. Von der Theorie ist das relativ wenig und wird dem, der die Grundlagen der Optik durchsichtiger Kristalle kennt, keine Schwierigkeiten bereiten. Diesem ersten, methodischen Teil habe ich aus zwei Gründen geglaubt, einen zweiten, theoretischen hinzufügen zu müssen: Die Ausführungen des ersten Teils sollten ihre Begründung erhalten; darüber hinaus erschien es wünschenswert, die Theorie der Optik absorbierender Kristalle nach dem heutigen Stand und unter dem Gesichtspunkt der von der erzmikroskopischen Seite aus interessierenden Fragen zusammenfassend in solchem Umfange darzustellen, daß sie als einheitliche und zugleich ausreichende Grundlage für weitere Arbeiten auf diesem Gebiete dienen kann. Eine solche Zusammenfassung erforderte es, auch die Bezeichnungsweise rationell und einheitlich zu gestalten. Es war daher nicht zu umgehen, die in früheren Arbeiten, auch in meinen, geübte Symbolik abzuändern. Auch mußte die Ansicht darüber, welche Darstellungsform zweckmäßig und was wichtig ist, gegenüber früher mancher

Korrektur unterzogen werden, da auf dem heutigen Standpunkt manches wesentlichler erscheint, was vorher belanglos war, und umgekehrt. Ich habe mich aus diesem Grunde bemüht, die Ausführungen so zu gestalten, daß sie von seiten des Lesers ein Zurückgreifen auf Originalarbeiten überflüssig machen. Ich konnte daher auch von einem Literaturverzeichnis und ebenfalls von Zitaten absehen; die wenigen Autoren, von denen grundlegende Arbeiten auf diesem Gebiete vorliegen, sind bekannt, und eine Würdigung im einzelnen ist nicht der Zweck dieser Abhandlung. Auch führt der zweite Teil in vielen Punkten erheblich über die zur Zeit in der Literatur vorliegende Behandlung der Erscheinungen hinaus.

I. Methodischer Teil

A. Grundlagen der Optik absorbierender Kristalle

1. Fortpflanzung und Polarisisation des Lichts

Die optischen Symmetrieverhältnisse absorbierender Kristalle sind die gleichen wie die vollkommen durchsichtiger Kristalle. Trotzdem ergeben sich für absorbierende Kristalle in vieler Hinsicht andere Verhältnisse bei der Fortpflanzung, Polarisisation und Reflexion des Lichts als für durchsichtige Kristalle, weil diese Erscheinungen bei letzteren nicht in der allgemeinsten Form auftreten, wie sie mit der Symmetrie dieser Kristalle verträglich wäre. Bei absorbierenden Medien ist in qualitativer und quantitativer Hinsicht neben dem Brechungsindex der sogenannte Absorptionskoeffizient ein für die Erscheinungen mitbestimmender und gleichberechtigter Faktor. Seine Bedeutung ergibt sich aus dem Gesetz der Schwächung des Lichts beim Durchlaufen einer Wegstrecke d in dem betreffenden Medium:

$$1) \quad J = J_0 e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Ist λ_0 die Wellenlänge im Vakuum, so nennt man denjenigen Zahlenwert von k in dieser Gleichung, der mit den Erfahrungen über das Ausmaß der Lichtschwächung im Einklang steht, den Absorptionskoeffizienten.

Bei Vorhandensein von Absorption ist die Ableitung der Erscheinungen der Lichtfortpflanzung und Polarisisation in Kristallen aus einer so anschaulichen geometrischen Referenzfläche wie dem Indexellipsoid nicht mehr statthaft. Die Verallgemeinerung führt in diesem Falle auf eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung, deren Radienvektoren komplexe Brechungsindizes sind. Diese Fläche ist also nicht vorstellbar, und die Folgerungen für die optischen Erscheinungen können nicht mehr wie bei vollkommen durchsichtigen Kristallen auf dem Wege der Anschauung, sondern lediglich durch Berechnung ge-

funden werden. Auf solche Weise ergibt sich, daß in einer beliebigen Richtung eines absorbierenden Kristalls zwar ebenso wie bei durchsichtigen Kristallen immer zwei Wellen fortschreiten; diese beiden Wellen haben aber nicht nur unterschiedliche Brechungsindizes, sondern auch unterschiedliche Absorptionskoeffizienten, und ihr Schwingungszustand ist im allgemeinen elliptisch; die Achsen beider Schwingungsellipsen liegen senkrecht gekreuzt zueinander (Abb. 1); beide Ellipsen haben dasselbe Achsenverhältnis und werden in gleichem Drehsinne umlaufen. Die Schwingungsellipsen der beiden zu ein und derselben Fortpflanzungsrichtung gehörigen Wellen sind also einander ähnlich.

Lineare Schwingungszustände treten in erster Linie nur dort auf, wo dies die Symmetrieverhältnisse des Kristalls erfordern. Es trifft dies insonderheit bei den Kristallen des quadratischen, hexagonalen und trigonalen Systems für jede beliebige Fortpflanzungsrichtung zu. In diesem Falle behält auch die kristallographische Hauptachse die gleichen Eigenschaften als optische Achse wie bei fehlender Absorption. In Kristallen niederer Symmetrie treten lineare Schwingungszustände vornehmlich für alle solche Fortpflanzungsrichtungen auf, die innerhalb einer optischen Symmetrieebene des Kristalls verlaufen. Es gibt aber bei diesen Kristallen, sofern sie absorbieren, keine Richtungen mit den Eigenschaften wahrer optischer Achsen.

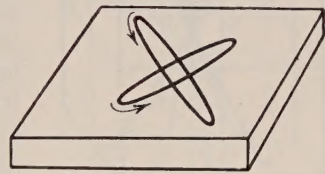


Abb 1. Schwingungszustand der in den Anschliff eindringenden Wellen.

Mit zunehmender Absorption spaltet sich vielmehr jede ursprüngliche optische Achse in ein Paar von Achsen unterschiedlicher Richtung auf. In diesen neuen singulären Richtungen pflanzt sich zwar auch immer nur eine Welle fort, aber ihr Polarisationszustand ist im Gegensatz zu den Verhältnissen bei wahren optischen Achsen nicht mehr beliebig, sondern stets zirkular. Diese sogenannten „Windungsachsen“ treten immer paarweise auf; der Schwingungszustand, von derselben Seite betrachtet, ist in der einen links zirkular und in der anderen rechts zirkular. Dagegen treten in den Richtungen der ursprünglichen optischen Achsen auch bei schwächster Absorption immer zwei linear polarisierte Wellen mit unterschiedlichen Absorptionskoeffizienten auf. Die Kristalle der niederen Symmetrie haben also, sofern sie auch nur ein wenig absorbieren, nicht mehr zwei optische Achsen, sondern an deren Stelle im allgemeinen vier Windungsachsen. Diese liegen immer außerhalb von etwa vorhandenen Symmetrieebenen (Abb. 2).

In absorbierenden Kristallen befolgt die Variation der Brechungsindizes mit der Richtung im allgemeinen nicht mehr das FRESNELSche Gesetz (Abb. 29, 30). Die Abweichungen davon werden aber in solchen

Kristallen außerordentlich klein, bei denen k^2 neben n^2 vernachlässigt werden kann.

Zur vollkommenen Kennzeichnung der Optik eines triklinen absorbierenden Kristalls im monochromatischen Licht bedarf es der Kenntnis von zwölf voneinander unabhängigen Konstanten. Drei davon sind die Hauptbrechungsindizes n_1, n_2, n_3 , drei weitere die Hauptabsorptionskoeffizienten k_1, k_2, k_3 , die sechs übrigen Konstanten können gedeutet werden als Richtungskosinus zweier rechtwinkligen dreiachsigen Symmetrieachsensysteme im Kristall. Die Richtungen dieser Achsen kennzeichnen aber weder Richtungen, in denen Hauptwerte von n auftreten, noch Richtungen, in denen Hauptwerte von k auftreten, sondern sind in triklinen Kristallen lediglich Symmetrieachsen für

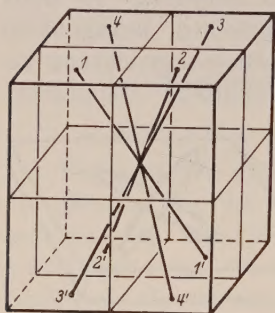


Abb. 2. Lage der 4 Windungsachsen in einem rhombischen Kristall.

die Richtungsabhängigkeit der Funktionen $\frac{n^2 + k^2}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ bzw. $\frac{n^2 + k^2}{\sqrt{2nk}}$. Erst mit dem Auftreten kristallographischer Symmetrieebenen wird auch die Richtungsabhängigkeit von n und k einzeln zunehmend symmetrisch. In monoklinen Kristallen steht in beiden Achsen tripeln je eine Achse senkrecht zur kristallographischen Symmetrieebene. Die Optik eines solchen Kristalls wird im monochromatischen Licht durch acht Konstanten beschrieben, von denen zwei Richtungskosinus sind. In rhombischen Kristallen liegen beide optischen Symmetrieachsensysteme parallel zu dem kristal-

lographischen Hauptachsensystem. Die optische Kennzeichnung solcher Kristalle erfordert daher nur die Angabe der Brechungsindizes und der Absorptionskoeffizienten für die Richtungen der drei kristallographischen Hauptachsen. In den Kristallen des quadratischen, hexagonalen und trigonalen Systems herrscht in beiden optischen Symmetrieachsensystemen Rotationssymmetrie zur kristallographischen Hauptachse. Die optischen Verhältnisse eines solchen Kristalls werden durch die Indexpaare n_ω, k_ω und n_ϵ, k_ϵ beschrieben. Im kubischen System endlich werden die optischen Eigenschaften durch ein mit der Richtung unveränderliches Größenpaar n, k gekennzeichnet.

2. Reflexion des Lichts

Schon bei sehr kleinen Werten von k nimmt wegen der Kleinheit der Lichtwellenlänge gegenüber der Weglänge d der Einfluß des Exponentialfaktors in der Intensitätsformel 1) so stark zu, daß die Kristalle in Dünnschliffdicke undurchsichtig werden und zu ihrer Be-

obachtung Auflicht angewandt werden muß. Die diagnostischen Methoden zur Untersuchung der Erzmineraleien beruhen daher im wesentlichen auf einer Analyse der Reflexionserscheinungen. Bei senkrechtem Lichteinfall unterscheiden sich absorbierende von vollkommen durchsichtigen Kristallen in den Eigenschaften der Polarisation des reflektierten Lichts nur dann, wenn sie anisotrop sind. Die hierbei auftretenden Verhältnisse sind leicht zu verstehen, wenn man von den Erscheinungen der Reflexion an vollkommen durchsichtigen anisotropen Medien ausgeht.

Den Reflexionsvorgang an einem durchsichtigen anisotropen Kristall kann man sich in folgender Weise vorstellen: Die einfallende Lichtschwingung (Abb. 3) mit der Schwingungsrichtung S_E wird in ihre Komponenten parallel zu den beiden Schwingungsrichtungen S_1 und S_2 in der Kristallplatte zerlegt. Von diesen Komponenten wird je ein im allgemeinen verschiedener Bruchteil reflektiert, und diese reflektierten Komponenten setzen sich wieder zu einer linearen Schwingung zusammen. Deren Azimut ψ_r ist sowohl von dem der einfallenden Schwingung wie auch von den Azimuten der Schwingungsrichtungen im Kristall verschieden und hängt, wie leicht einzusehen ist, lediglich von der Stärke der Reflexion beider Komponenten ab. Das Azimut ψ_r der resultierenden Schwingung erscheint immer in Richtung der stärker reflektierten Schwingung gedreht, am meisten dann, wenn die Schwingungsrichtungen im Anschliff diagonal zu der des einfallenden Lichts liegen. Das Azimut der resultierenden Schwingung stimmt nur dann mit dem des einfallenden Lichts überein, wenn eine der Schwingungsrichtungen im Anschliff parallel zu der des einfallenden Lichts liegt. Wir nennen dann die Reflexion „uniradial“. Bei senkrecht einfallendem linear polarisierten Licht ist also das Ergebnis der Reflexion an vollkommen durchsichtigen anisotropen Kristallen wieder eine lineare Schwingung, aber mit anderer Amplitude und im allgemeinen auch mit anderem Azimut als im einfallenden Licht.

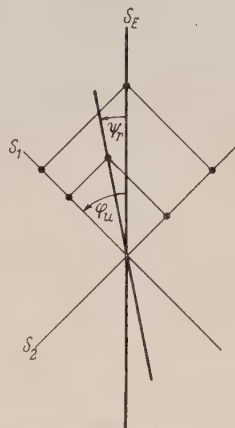


Abb. 3. Azimut ψ_r der resultierenden linearen Schwingung bei der Reflexion linear polarisierten Lichts an einem vollkommen durchsichtigen Kristall.

Wenn das einfallende Licht unpolarisiert ist, resultiert zufolge des größeren Einflusses der stärker reflektierten Schwingung teilweise polarisiertes Licht.

Ist der Kristall absorbierend, so werden die nach den Schwingungen im Anschliff zerlegten Komponenten des einfallenden Lichts

nicht nur stärker und im allgemeinen unterschiedlicher reflektiert als bei fehlender Absorption, sondern sie erhalten außerdem durch die

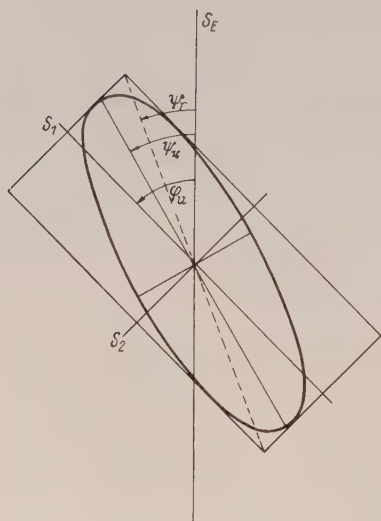


Abb. 4. Elliptische Polarisation des Lichts bei der Reflexion an einem absorbierenden Kristall. Das Azimut ψ_r der großen Halbachse der Schwingungsellipse ist von dem Azimut ψ_k der linearen Schwingung, die bei fehlender Phasendifferenz der Komponenten resultieren würde, verschieden. Die Schwingungsellipse ist dem Rechteck aus den erzeugenden Komponenten eingeschrieben.

Reflexion eine relative Phasendifferenz gegeneinander und setzen sich daher, wenn das einfallende Licht linear polarisiert war, nicht mehr zu einer linearen, sondern zu einer elliptischen Schwingung zusammen (Abb. 4). Da die relative Phasendifferenz der Komponenten in der Regel sehr klein ist, gilt dies auch für das Achsenverhältnis der resultierenden Schwingungsellipse. Aus demselben Grunde weicht das Azimut ψ_r der großen Ellipsenachse nur sehr wenig von der Richtung ψ_k derjenigen linearen Schwingung ab, die sich bei fehlender Phasendifferenz ergeben würde. Die Schwingungsellipse ist immer dem Rechteck mit den erzeugenden Komponenten als Halbseiten eingeschrieben. Da die Intensität einer elliptischen Schwingung proportional zum Quadrate der Diagonale eines solchen Rechtecks ist, wird durch die Phasendifferenz an der resultierenden Intensität nichts geändert, sondern eben nur die Schwingungsform beeinflusst.

Diese allgemeinen Beziehungen gelten unabhängig davon, ob die in den Kristall eindringenden Wellen linear oder elliptisch polarisiert sind.

B. Erscheinungen im Auflicht

1. Im unpolarisierten Licht

Wenn das einfallende Licht unpolarisiert ist und auch im Strahlengang des reflektierten Lichts polarisierende Vorrichtungen nicht angewandt werden, gelangt nur das Reflexionsvermögen zur Beobachtung. Die Unterscheidung von Isotropie und Anisotropie wird erst möglich, wenn der Polarisationszustand des reflektierten Lichts analysiert wird. Benutzt man hierzu einen einfachen Analysator, so tritt bei raschem Drehen des Anschliffs oder des Analysators die teilweise Polarisation des reflektierten Lichts an anisotropen Anschliffen durch Helligkeitsänderungen in Erscheinung. Diese sind aber zumeist nicht

sehr auffällig, da der Polarisationsgrad, d. h. der Anteil des polarisierten Lichts am Gesamtlicht, in der Regel nur wenige Prozente beträgt. Man kann zwar die Beobachtung durch Anwendung der SAVARTSchen Streifen erheblich empfindlicher machen, doch lohnt es sich nicht darauf einzugehen, da man aus den später zu behandelnden Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols mit einfacheren Hilfsmitteln den Polarisationsgrad sehr genau bestimmen kann.

2. Im polarisierten Licht

a) Ohne Analysator

Ist das einfallende Licht linear oder wenigstens annähernd linear polarisiert, so ändert sich bei voller Umdrehung anisotroper Anschliffe die Intensität viermal zwischen zwei Extremalwerten. Die Azimute dieser Extremalwerte entsprechen den Normallagen des Anschliffs, und die Intensitäten in diesen Lagen bestimmen die beiden uniradiellen Reflexionsvermögen, allerdings in reiner Form nur dann, wenn die in den Kristall eindringenden Wellen linear polarisiert sind. Mit zunehmender elliptischer Polarisation der eindringenden Wellen wird ein Unterschied zwischen den beiden Extremalwerten der Reflexion immer weniger bemerkbar.

Die Tatsache der anisotropen Reflexion bezeichnet man auch als Doppelreflexion. Dagegen ist die häufig dafür verwandte Bezeichnung „Reflexionsdichroismus“ abwegig. Die Doppelreflexion hat nichts mit der Absorption zu tun, sondern kennzeichnet allein den anisotropen Charakter des Anschliffs. Sie tritt genau so auffällig auch bei vollkommen durchsichtigen Kristallen in Erscheinung.

Für anisotrope Kristalle wird die Doppelreflexion Null an Schnitten senkrecht zur kristallographischen Hauptachse optisch einachsiger Kristalle, ferner bei Kristallen niederer Symmetrie für Anschliffe senkrecht zu einer Windungsachse und für solche Anschliffe, bei denen sich zufällig das gleiche uniradielle Reflexionsvermögen für beide Wellen ergibt.

Den Mittelwert der beiden uniradiellen Reflexionsvermögen nennt man das mittlere Reflexionsvermögen des Anschliffs.

b) Zwischen parallelen Nicols

Da, wie bereits oben hervorgehoben, das Achsenverhältnis der resultierenden Schwingungsellipse in der Regel sehr klein ist und auch das Azimut der Schwingungsellipse namentlich dann, wenn die beiden uniradiellen Reflexionsvermögen nicht sehr unterschiedlich sind, nur verhältnismäßig wenig von dem Schwingungszimut des einfallenden Lichts abweicht, kommt zwischen parallelen Nicols fast die gesamte Intensität des reflektierten Lichts zur Geltung, die auch

ohne Analysator in Erscheinung treten würde. Daher sind die Erscheinungen im Auflicht zwischen parallelen Nicols von denen ohne Analysator im allgemeinen nur wenig verschieden und haben keine praktische Bedeutung.

c) Zwischen gekreuzten Nicols

Die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols im Auflicht sind in unvergleichlich stärkerem Maße von Feinheiten im Polarisationszustand des einfallenden Lichts abhängig als die bisher besprochenen Erscheinungen. Eine Analogie zu den Verhältnissen zwischen gekreuzten Nicols im durchfallenden Licht ist nicht vorhanden. Es ist daher nicht zu umgehen, den Einfluß, welchen der Polarisationszustand des einfallenden Lichts auf die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols im Auflicht ausübt, gründlich zu beachten.

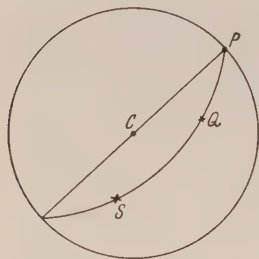


Abb. 5. Homogen lineare Polarisation in einem räumlichen Strahlenbündel. Wenn P die Polarisationsrichtung des Zentralstrahles C ist, ist die zu einem beliebigen Strahl S des Bündels gehörige Polarisationsrichtung durch Q gegeben.

Maßgeblich für den Polarisationszustand des einfallenden Lichts sind die speziellen Eigenschaften des Polarisators, die Art der ablenkenden Vorrichtung im Opakilluminator und die Wirkungen der im Strahlengang zwischen Polarisator und Anschliff befindlichen Linsen. Da der Polarisator nur für eine relativ kleine Öffnung der Strahlenkegel beansprucht wird, entspricht der Polarisationszustand in diesen Strahlenkegeln bei Verwendung eines sog. normalpolarisierenden Prismas so gut wie vollkommen demjenigen Idealzustand, wie er mit den Bedingungen einer „homogenen“ linearen Polarisation gemäß der elektromagnetischen Lichttheorie verträglich ist: Alle Strahlen sind linear polarisiert, und ihre Polari-

sationsebenen schneiden sich in Geraden, die sämtlich parallel zur Polarisationsrichtung derjenigen Strahlen liegen, welche senkrecht zur geraden Endfläche des Polarisators austreten. Ist in einer stereographischen Projektion (Abb. 5) C die Richtung des Zentralstrahles und CP seine Polarisationsebene, also P die Polarisationsrichtung des Zentralstrahles, so wird bei homogener linearer Polarisation die Polarisationsebene für irgendeinen anderen Strahl S durch den Großkreis SP dargestellt, und die Polarisationsrichtung dieses Strahles liegt auf diesem Großkreis bei Q, 90° von S absteehend. Die Polarisations Ebenen der beiden Strahlen C und S schließen also den Winkel CPS miteinander ein und die Polarisationsrichtungen den Winkel PQ. Auch in einer homogen linear polarisierten Strahlenmannigfaltigkeit können nur parallele Strahlen gleichliegende Polarisationsrichtungen haben.

In der Abb. 6 ist das Schema des Strahlengangs in der Beleuchtungsvorrichtung gezeichnet, und zwar unter Berücksichtigung nur solcher Strahlen, welche das Gesichtsfeld im Anschliff begrenzen, und nur solcher, welche die Apertur im Anschliff bestimmen. Die von der Mitte der Aperturblende A ausgehenden Strahlen verlaufen beim Auftreffen auf den Anschliff zueinander parallel und fallen senkrecht auf den Anschliff ein. Bei justiertem Strahlengang im Opakilluminator trifft dies, abgesehen von einzelnen wenig gebrauchten Sonderobjektiven, in den meisten Fällen mit genügender Annäherung zu. Die von der Mitte der Aperturblende ausgehenden Strahlen haben also, von dem Einfluß der ablenkenden Vorrichtung und von den brechenden Wirkungen der Linsenflächen zunächst abgesehen, beim Auftreffen

auf den Anschliff praktisch gleichliegende Polarisationsrichtungen. Dies trifft dagegen nicht zu für diejenigen Strahlen, die sich nach Maßgabe der benutzten Öffnung der Aperturblende in einem und demselben Punkt des Anschliffs schneiden; denn diese Strahlen haben beim Auftreffen auf den Anschliff unterschiedliche Einfallswinkel und damit auch untereinander verschiedene Polarisationsrichtungen. Durch die Anwendung größerer Beleuchtungsaperturen wird demnach der Polarisationszustand im Gesichtsfeld zunehmend undefiniert. In dieser Hinsicht sind aber die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols sehr empfindlich. Um unzureichender Definition vorzubeugen, muß die Aperturblende in A stets hinreichend geschlossen werden. Es gilt dies insbesondere für die Objektive, die an sich höhere Aperturen zulassen. Beim Übergang von schwachen zu stärkeren Systemen verlieren daher die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols erheblich an Prägnanz, solange man nicht gleichzeitig mit dem Objektivwechsel auch die Öffnung der Aperturirisblende entsprechend verkleinert. Man darf nicht vergessen, daß dieselbe Öffnung der Aperturblende in A bei schwachen und starken Objektiven durchaus verschiedenen wirksamen

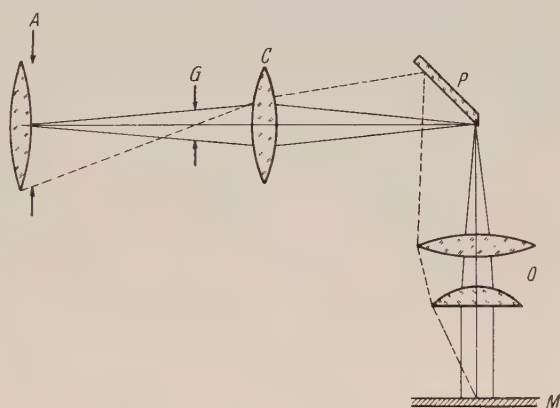


Abb. 6. Schema des Strahlenganges in der Beleuchtungsvorrichtung. A: Aperturblende vor dem Opakilluminator. G: Gesichtsfeldblende im Opakilluminator. C: Collimatorlinse im Opakilluminator. P: ablenkende Vorrichtung. O: Mikroskopobjektiv. M: Anschliff.

Ercheinungen zwischen gekreuzten Nicols sehr empfindlich. Um unzureichender Definition vorzubeugen, muß die Aperturblende in A stets hinreichend geschlossen werden. Es gilt dies insbesondere für die Objektive, die an sich höhere Aperturen zulassen. Beim Übergang von schwachen zu stärkeren Systemen verlieren daher die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols erheblich an Prägnanz, solange man nicht gleichzeitig mit dem Objektivwechsel auch die Öffnung der Aperturirisblende entsprechend verkleinert. Man darf nicht vergessen, daß dieselbe Öffnung der Aperturblende in A bei schwachen und starken Objektiven durchaus verschiedenen wirksamen

Aperturen im Anschliff entspricht. Eine Beschränkung der Apertur ist auch noch aus einem anderen Grunde notwendig, wie übrigens ebenfalls aus Abb. 6 ersichtlich ist: Die Strahlen mit höherer Apertur im Anschliff durchsetzen die Linsen des Objektivs im allgemeinen in größerem Abstand von der Achse. Es werden daher namentlich bei stärkeren Objektiven infolge der stark gekrümmten Linsenflächen die Einfallswinkel an den brechenden Flächen für die Strahlen von höherer Apertur erheblich. Damit ist aber eine stärkere Drehung der Polarisationssebene des Lichts beim Durchgang durch die Linsen verbunden. Den jeweilig beanspruchten Teil der Objektivapertur erkennt man nach Herausnahme des Okulars beim Einblick in den Tubus oder mittels einer Hilfslupe, die man auf die Austrittspupille des Mikroskops über dem Okular fokussiert.

Die Beschränkung der Beleuchtungsapertur ist zwar für die Erzielung eines homogen polarisierten Gesichtsfeldes eine unbedingte Voraussetzung, aber keine Garantie einer solchen. Von wesentlicher Bedeutung ist noch der Einfluß der ablenkenden Vorrichtung. Aus dem Schema des Strahlenganges in Abb. 6 ist zu erkennen, daß auch bei kleinster Apertur der beleuchtenden Bündel die dann auf den Anschliff nahezu senkrecht einfallenden Lichtstrahlen vorher innerhalb der ablenkenden Vorrichtung ein räumliches Strahlenbündel gebildet haben, dessen halbe Öffnung z im Bogenmaß sich näherungsweise aus

$$2) \quad z = \frac{r}{f}$$

berechnet, wenn r den Radius des objektiven Gesichtsfeldes im Anschliff und f die Brennweite des Mikroskopobjektivs ist. Die Strahlen dieses Bündels haben an der reflektierenden Fläche der ablenkenden Vorrichtung verschiedene Einfallswinkel. Da man aus Intensitätsgründen darauf angewiesen ist, zur Ablenkung nur total reflektierende oder stark metallisch reflektierende Flächen zu benutzen, und bei solchen Reflexionen Phasendifferenzen auftreten, geht das einfallende linear polarisierte Licht durch die Reflexion in elliptisch polarisiertes über. Die resultierenden Veränderungen hängen vom Einfallswinkel und vom Azimut der ursprünglichen Polarisationssebene gegen die Einfallsebene ab. Da beides für die einzelnen Strahlen des Bündels variiert, resultiert nach der 90°-Ablenkung aus dem ursprünglich homogen linear polarisierten Strahlenbündel ein inhomogen elliptisch polarisiertes, und es treten selbst bei Beschränkung auf kleinste Beleuchtungsapertur, d. h. auf nahezu senkrechten Lichteinfall im Anschliff, innerhalb des Gesichtsfeldes unterschiedliche Polarisationsrichtungen und unterschiedliche Polarisationszustände auf. Die Auswirkung solcher Verhältnisse auf die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols im Auflicht hängt auch von den optischen Konstanten des

Anschliffs ab. Unter normalen Verhältnissen erscheinen schon bei azimuthalen Differenzen der Polarisation von ca. $\pm \frac{1}{2}^\circ$ und bei Unterschieden im Achsenverhältnis der Schwingungsellipsen von $\pm \frac{1}{100}$ benachbarte, an sich durchaus homogene Stellen des Anschliffs nach Helligkeit und Farbe deutlich inhomogen und verhalten sich hinsichtlich der Farb- und Helligkeitsänderungen beim Drehen des Anschliffs in seiner Ebene durchaus verschiedenartig. Solche Verhältnisse führen zu regelwidrigen Beobachtungen und machen eine quantitative Analyse ganz unmöglich.

Ablenkende Vorrichtungen verschiedener Konstruktion zeigen diese Mängel in verschiedenem Maße. Am gebräuchlichsten war früher und ist vielfach auch heute noch ein rechtwinkliges, total reflektierendes Prisma. Die Veränderungen, welche eine solche ablenkende Vorrichtung dem Polarisationszustand eines räumlichen, ursprünglichen

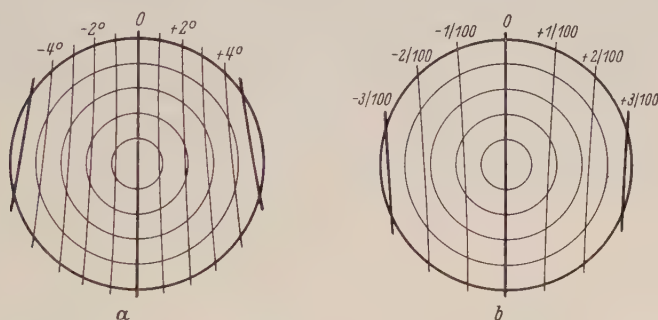


Abb. 7. Azimutale Fehler der Polarisation (a) und Achsenverhältnisse der Schwingungsellipsen (b) in einem ursprünglich homogen linear polarisierten Strahlenbündel nach 90° -Ablenkung durch Totalreflexion in einem rechtwinkligen Prisma aus Glas vom Brechungsindex 1,516. Die Schwingungsrichtung des Polarisators liegt parallel zur Symmetrieebene des Prismas. Die konzentrischen Kreise messen die Öffnung des Strahlenbündels in Luft, von 1° zu 1° wachsend.

homogen linear polarisierten Strahlenbündels erteilt, ist in Abb. 7 für eine halbe Öffnung des Strahlenbündels in Luft von 5° dargestellt, und zwar unter a) die azimuthalen Veränderungen und unter b) die Achsenverhältnisse der resultierenden Schwingungsellipsen. Positive und negative Werte der Achsenverhältnisse unterscheiden den Umlaufsinn der Schwingungsellipsen. Dem Zentralstrahl des Bündels, für den die Veränderungen des Polarisationszustandes in der Mitte der Abbildungen dargestellt sind, entspricht ein Einfallswinkel von 45° an der reflektierenden Fläche. Die konzentrischen Kreise geben die Öffnung des Strahlenbündels in Luft, von 1° zu 1° wachsend. Bei der Zeichnung der Abbildungen ist ferner angenommen, daß die Schwingungsrichtung des Polarisators genau parallel zur Symmetrieebene des Prismas steht. Würde sie genau senkrecht zur Symmetrieebene liegen,

so würde sich nur der Umlaufsinn der Ellipsen umkehren, sonst aber an der Verteilung der Fehlerbeträge sich nichts ändern. Bei senkrechtem Lichteinfall entsprechen die Fehler im Polarisationszustand des Gesichtsfeldes genau den in den Abbildungen dargestellten Beträgen. Mit zunehmender Apertur aber ergeben sich die wirklichen Polarisationsverhältnisse im Gesichtsfeld als Summationswirkungen der Polarisationszustände innerhalb eines der jeweilig wirksamen Apertur entsprechenden Bereiches der Abbildungen. Demnach ist selbst bei kleinster Apertur nur in einem schmalen, zentral liegenden Streifen des Gesichtsfeldes parallel zur Symmetrieebene des Prismas der Polarisationszustand linear und auch azimuthal ohne Abweichung. Liegt die Schwingungsrichtung des Polarisators nicht genau parallel oder senkrecht zur Symmetrieebene des total reflektierenden Prismas, so verschiebt sich der Streifen homogener linearer Polarisation, schon mit geringen Fehlorientierungen des Polarisators rasch zunehmend, seitlich, und es treten dann auch im Zentrum des Gesichtsfeldes azi-

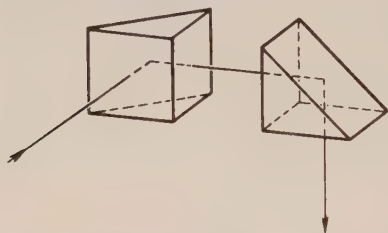


Abb. 8. Halbes Porrosches System zweiter Art (M. L. CAPDECOMME).

mutale und elliptische Abweichungen auf. Bei Berücksichtigung der oben angeführten zahlenmäßigen Daten für auffällig schädigende Wirkungen muß man in Anbetracht der aus den Abbildungen ablesbaren Fehlergrößen ein solches Prisma für die qualitative und quantitative Analyse der Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols als ungeeignet bezeichnen.

Eine deutliche Milderung der Fehlerscheinungen ergibt sich, wenn man statt des total reflektierenden Prismas einen Metallspiegel oder eine rückwärts metallisch verspiegelte, schwach keilförmige Glasplatte verwendet. Doch genügen auch diese Vorrichtungen nicht den Anforderungen, die für quantitative Bestimmungen erstrebenswert sind.

Wenn man zwei rechtwinklige total reflektierende Prismen kreuzt, so daß sie zusammen ein halbes Porrosches System zweiter Art bilden (Abb. 8), stehen für einen fast ebenen diagonalen Schnitt durch das Strahlenbündel die Einfallsebenen an den beiden total reflektierenden Flächen aufeinander senkrecht. Daher kompensieren sich in diesem Schnitt die mit der Totalreflexion verbundenen Phasendifferenzen insonderheit dann vollständig, wenn für den Einfallswinkel 45° die Phasendifferenz in dem betreffenden Glase ein Maximum ist. Das trifft für den Brechungsindex $n = \sqrt{3}$ zu. Eine solche Prismenkombination hat daher die Eigenschaft, daß in einem diagonalen Schnitt durch das Strahlenbündel, und zwar ganz unabhängig von der Orien-

tierung des Polarisators, eine homogen lineare Polarisation resultiert (Abb. 9). Aber für die anderen Strahlen des Bündels treten auch bei dieser ablenkenden Vorrichtung starke azimutale und elliptische

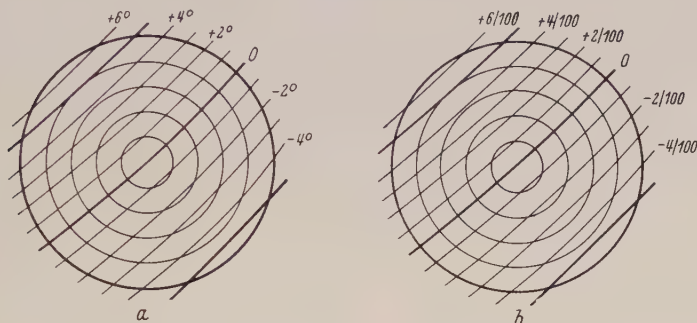


Abb. 9. Azimutale Fehler der Polarisation (a) und Achsenverhältnisse der Schwingungsellipsen (b) in einem ursprünglich homogen linear polarisierten Strahlenbündel, das eine Prismenkombination gemäß Abb. 8 aus Glas vom Brechungsindex $\sqrt{3}$ durchsetzt hat. Die Schwingungsrichtung des Polarisators steht senkrecht zur Symmetrieebene des ersten Prismas.

Fehler der Polarisation auf, deren Beträge mit der Orientierung des Polarisators wechseln.

Ein so gut wie vollkommen homogen linear polarisiertes Feld von größerer Ausdehnung liefert das in Abb. 10 dargestellte Prisma, das drei totale Reflexionen zwischen parallelen Flächen in einem Glaskörper vom Brechungsindex $n = \sqrt{3}$ benutzt. Die Leistung dieses „Kompensationsprisma“ erhellet aus den Abb. 11. Hier ist im Gegensatz zu den Abb. 7 u. 9 für die Zeichnung der Isoklinen ein 10mal feinerer Maßstab zugrunde gelegt worden. Trotzdem erscheint das Feld innerhalb des dargestellten Winkelbereiches so gut wie vollkommen frei von Fehlern. Diese überlegenen Eigenschaften bleiben auch bei Fehlorientierungen des Polarisators, die man in der Praxis nicht ganz ausschalten kann, erhalten. Bei Verwendung eines solchen Kompensationsprismas bestehen für die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols innerhalb eines Feldes von größerer Ausdehnung übersichtliche und einfache Gesetzmäßigkeiten. Diese sind unterschiedlich, je nachdem ob die Nicols genau gekreuzt sind oder nicht.

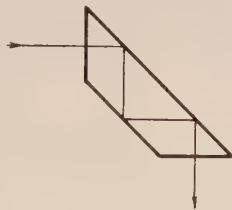


Abb. 10. Kompensationsprisma (M. BEREK).

Vollkommen gekreuzte Nicols. — Bei einer vollen Umdrehung des Kristalls in seiner Ebene treten, sofern der Anschliff anisotrop ist, in vier genau um 90° im Azimut voneinander unter-

schiedlichen Lagen Minimalwerte der Intensität auf; diese Azimute entsprechen genau den Normallagen des Anschliffs, d. h. denjenigen Lagen, in welchen die Schwingungsrichtungen der in den Kristall eindringenden Wellen parallel zu denen der Nicols liegen. In den vier um 45° hiervon abstehenden Azimuten treten Maxima der Intensität auf; sie entsprechen den Diagonalstellungen der Schwingungsrichtungen mit Bezug auf die der Nicols. Keine Normallage ist intensitätsmäßig vor der anderen unterschieden, und ebenso sind die Diagonallagen intensitätsmäßig untereinander gleichwertig. Vollständige Auslöschung in den Normallagen tritt nur dann ein, wenn die in den Kristall eindringenden Wellen linear polarisiert sind. Wachsende elliptische Polarisation der eindringenden Wellen bewirkt zunehmende Aufhellung der Normallagen. Anschliffe mit zirkularer Polarisation in den gebrochenen Wellen verhalten sich wie isotrope.

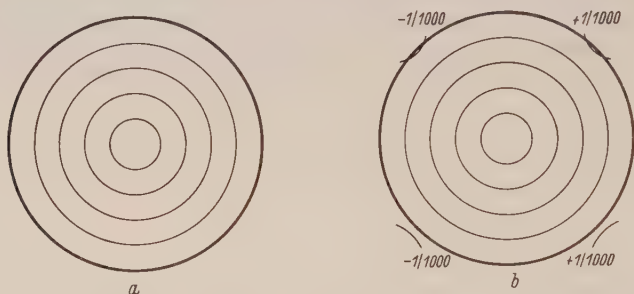


Abb. 11. Die ursprüngliche homogen lineare Polarisation des Strahlenbündels bleibt nach Durchgang durch das Kompensationsprisma aus Glas vom Brechungsindex $1\frac{3}{4}$ fast ideal erhalten. Die Schwingungsrichtung des Polarisators liegt parallel zur Symmetrieebene des Prismas. Die azimutalen Fehler sind im Bereiche der dargestellten Öffnung des Bündels überall kleiner als $0,01^\circ$, die Achsenverhältnisse der Schwingungsellipsen kleiner als $\frac{1}{1000}$.

Weitere, auch für die Praxis nicht unwesentliche Feinheiten der Erscheinungen sind im theoretischen Teil unter II, E, 3 diskutiert.

Nicht vollkommen gekreuzte Nicols. — Im allgemeinen treten auch hier vier Auslöschungslagen bzw. Stellungen minimalster Helligkeit bei voller Umdrehung des Kristalls auf. Aber ihre Azimute folgen nicht mehr in Intervallen von genau 90° aufeinander, sondern in Intervallen, die gegenüber 90° abwechselnd zu klein und zu groß sind (Abb. 12). Diese Fehlerscheinungen werden schon bei kleinsten Mängeln in der Nicolkreuzung deutlich bemerkbar. Wie stark sie sich im Einzelfalle auswirken, hängt wesentlich auch von den optischen Konstanten des Anschliffs ab. In Grenzfällen werden bei voller Umdrehung des Kristalles nur zwei Auslöschungen beobachtet, die dann um 180° voneinander abstehen.

Trotz dieser Fehlerscheinungen kann man auch im vorliegenden Falle die wahre Orientierung der Schwingungsrichtungen im Anschliff sehr genau finden. Man nimmt das Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auslöschungslagen; die eine Schwingungsrichtung im Kristall liegt dann parallel zur Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts, wenn man den Drehtisch auf den um 45° erhöhten Mittelwert einstellt, und die andere Schwingungsrichtung, wenn man auf den um 45° verminderten Mittelwert einstellt. Der Fehler einer solchen Bestimmung der Schwingungsrichtungen ist, auch wenn die Auslöschungsintervalle beliebig stark verschlagen, nur gleich dem halben Fehler in der Nicolkreuzung.

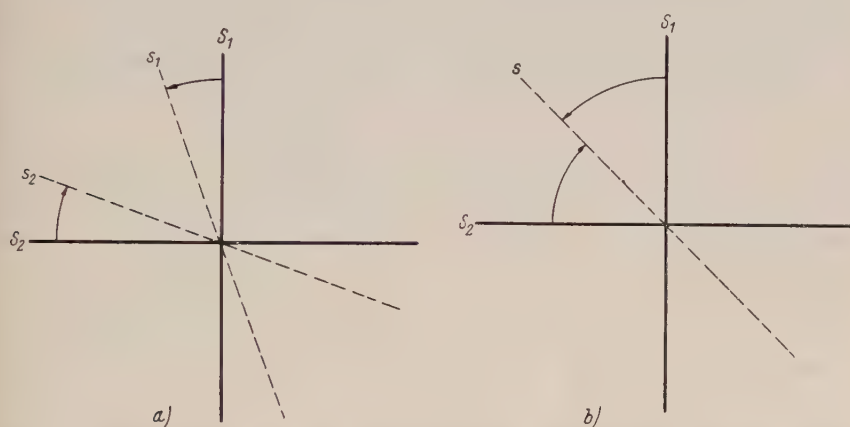


Abb. 12. Fehlorientierungen der Auslöschungslagen im Auflicht bei nicht vollkommen gekreuzten Nicols. An Stelle der wirklichen Schwingungsrichtungen S_1 , S_2 erscheinen als Auslöschungsrichtungen die in entgegengesetztem Drehungssinne um nahezu gleiche Beträge gegen S_1 , S_2 verlagerten Richtungen s_1 , s_2 . Im Grenzfalle (b) ist scheinbar nur eine Schwingungsrichtung vorhanden.

3. Einfluß der Immersion

Bei Verwendung von Immersionsflüssigkeiten wird mit zunehmendem Brechungsindex der Immersion bis zum Betrage der Lichtbrechung im Kristall die reguläre Reflexion am Anschliff vermindert, und zwar um so augenfälliger, je kleiner die Absorptionskoeffizienten des Kristalls sind. Gegebenenfalls treten dann Innenreflexe sowie die Eigenfarbe des Minerals wesentlich deutlicher hervor. Bei stärkerer Dispersion namentlich der Brechungsindizes des Kristalls werden bei Benutzung einer Immersion zufolge der unterschiedlichen Minderung des Reflexionsvermögens für die einzelnen Lichtarten des sichtbaren Spektrums auch augenfällige Farbänderungen des regulär reflektierten Lichts wahrnehmbar. Anders als diese Erscheinungen, die man im unpolarisierten

Licht oder nur mit dem Polarisator oder zwischen parallelen Nicols beobachtet, verhalten sich die Anisotropieeffekte zwischen gekreuzten Nicols bei Verwendung einer Immersion. Hier ist maßgeblich, daß die Immersion eine Änderung in der Lage der bei der Reflexion resultierenden Schwingungsellipse bewirkt, und zwar so, daß die Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols mit wachsendem Brechungsindex der Immersion immer zunimmt, besonders deutlich dann, wenn die Absorptionskoeffizienten des Kristalls hoch sind. Bei nicht völlig gekreuzten Nicols wird ferner das Verschlagen der Auslöschungsintervalle gegen 90° für Immersionen mit höherem Brechungsindex in der Regel erheblich geringer als bei Beobachtung in Luft.

C. Quantitative Bestimmungen zwischen gekreuzten Nicols

1. Allgemeines über die Meßvorrichtung

Die quantitativen Bestimmungen zwischen gekreuzten Nicols betreffen die Lage der Schwingungsrichtungen im Anschliff, die Art dieser Schwingungen und die Eigenschaften der reflektierten Schwingungsellipse. Um eine möglichst stark elliptische Schwingung im reflektierten Licht zu erhalten, muß man den Anschliff in Diagonalstellung zu den Nicols bringen. Die Analyse der elliptischen Schwingung erfolgt dann am einfachsten so, daß man sie durch Hinzufügung einer Phasendifferenz in eine lineare verwandelt, die man hierauf durch Drehung des Analysators auslöscht. Diese die Elliptizität der Schwingung kompensierende Phasendifferenz und das hierdurch erzeugte Azimut der linearen Polarisation kennzeichnen die Eigenschaften der reflektierten Schwingungsellipse vollständig. Eine solche Beschreibung der elliptischen Schwingung ist aber auf unendlich viele Arten möglich: Jedes der Schwingungsellipse umschriebene Rechteck (Abb. 4) kennzeichnet in der Richtung seiner Diagonale das Azimut einer linearen Schwingung, die man aus der elliptischen erhält, wenn man den parallel zu den Seiten des Rechtecks liegenden Komponenten eine geeignete Phasendifferenz aufprägt. Eine elliptische Schwingung läßt sich also durch unendlich viele Paare zusammengehöriger Werte einer Phasendifferenz und eines Azimuts linearer Polarisation beschreiben. Jede dieser Beschreibungen ist vollständig und richtig. Man kann daher im Prinzip die Schwingungsrichtungen des Kompensators, welcher die Phasendifferenz erzeugt, ganz beliebig orientieren. Aber für jede dieser Orientierungen wird zur Kompensation der Elliptizität der Schwingung eine andere Phasendifferenz erforderlich, und es resultiert auch jedes Mal ein anderes Azimut der linearen Polarisation. Hinsichtlich der Ansprüche, die an die Empfindlichkeit des Kompensators gestellt werden, verhalten sich alle diese möglichen Fälle nicht gleichartig.

Am naheliegendsten wohl ist es, und dieser Fall ist im wesentlichen bei den von JOH. KÖNIGSBERGER und F. E. WRIGHT beschriebenen Meßmethoden verwirklicht, den Kompensator so anzuordnen, daß seine Schwingungsrichtungen parallel zu denen im Anschliff liegen. Die dann gemessene Phasendifferenz ist, wie ohne weiteres ersichtlich, ihrem Betrage nach gleich der Phasendifferenz, die die uniradialen, d. h. die parallel zu den Schwingungsrichtungen im Anschliff liegenden Komponenten, bei der Reflexion erlitten haben. Eine solche Messung entspricht also ganz dem physikalischen Vorgang bei der Entstehung der reflektierten Schwingungsellipse. Die Phasendifferenz, die in solchem Falle zur Kompensation der Elliptizität erforderlich ist, ist aber immer sehr klein, und der ihr entsprechende Gangunterschied liegt in der Größenordnung zwischen etwa $-10^{-2}\lambda$ bis $+10^{-2}\lambda$. Für diese Art der Messung ist also ein sehr empfindlicher Kompensator erforderlich.

Ein anderer Extremfall ergibt sich, wenn man die Schwingungsrichtungen im Kompensator parallel und senkrecht zu der des einfallenden Lichts anordnet. Die zur Kompensation in diesem Falle erforderlichen Phasendifferenzen entsprechen Gangunterschieden zwischen $-\frac{1}{4}\lambda$ und $+\frac{1}{4}\lambda$, machen also einen sehr viel weniger empfindlichen Kompensator notwendig. Allerdings hat diese Phasendifferenz eine nicht so unmittelbar anschauliche Beziehung zur Entstehung der reflektierten Schwingung. Doch kommt es hierauf bei der Analyse zunächst nicht an, da ja alle Paare von Meßparametern miteinander verknüpft sind und sich durch einfache Beziehungen ineinander überführen lassen.

Schließlich kann man statt eines fest orientierten Kompensators mit veränderlichem Gangunterschied ein Kristallplättchen, z. B. von Glimmer, mit veränderlichem Azimut benutzen. Man sucht dann dasjenige Azimut des Glimmerplättchens auf, bei dem der vorgegebene Gangunterschied des Plättchens die Elliptizität des reflektierten Lichts gerade kompensiert. Dieses Azimut sowie das zur Auslöschung der linearen Schwingung erforderliche Azimut des Analysators charakterisieren dann in Verbindung mit dem bekannten Gangunterschied des Glimmerplättchens ebenfalls vollständig und eindeutig die Eigenschaften der elliptischen Schwingung. Die Technik des Meßvorgangs wird in diesem Falle besonders einfach und bequem. Aus diesem Grunde haben wir den weiteren Ausführungen eine solche Anordnung zugrunde gelegt.

2. Beschreibung der Apparatur

Das Mikroskop (Abb. 13) besitzt einen in der Höhe einstellbaren Drehtisch mit Gradeinteilung. Der Opakilluminator enthält als ablenkende Vorrichtung das in Abb. 10 dargestellte „Kompensationsprisma“ aus besonders feingekühltem Glas. Der Opakilluminator ist



Abb. 13. Apparatur (M. BEREK) zur Messung der Anisotropieparameter zwischen gekreuzten Nicols.

sonst wie üblich mit Irisblende, fokusierbarer Linse und vorsteckbarem Polarisator versehen. An seinem Eintrittsrohr befestigt und vor dem Polarisator im Strahlengang befindet sich eine Beleuchtungslinse mit Irisblende und Halbblende. Diese können durch Betätigung eines Schraubchens an der Unterseite der Linsenfassung gehoben und gesenkt werden. Das Mikroskopobjektiv wird am Opakilluminator mittels eines zentrierbaren Rings in einer Zange gehalten. An Stelle

eines gewöhnlichen Mikroskopokulars ist in den Tubus, durch Nute orientiert und festklemmbar, ein Okular mit Vorrichtung zur Analyse elliptisch polarisierten Lichts eingesetzt. Dieses Okular enthält außer der abbildenden Optik ein ein- und ausschaltbares Glimmerplättchen und darüber ebenfalls ein- und ausschaltbar einen Analysator. Beide können durch Betätigung zweier Triebknöpfe gedreht werden, und die jeweiligen Azimute lassen sich an einem Gradbogen mit Nonien auf $0,1^\circ$ ablesen. Das für schrägen Einblick hergerichtete Okular besitzt ferner ein Fadenkreuz, auf das die Augenlinse fokussierbar ist, ferner ebenfalls im Gesichtsfeld eine Irisblende. Über der Augenlinse vorschlagbar ist eine fokussierbare Lupe zur konoskopischen Beobachtung.

Dem Glimmerplättchen ist eine Eich-tabelle beigegeben, die die Konstanten

$$3) \quad C = \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}, \quad S = \sin 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda}$$

für mehrere Lichtarten enthält. Die Dicke des Glimmerplättchens ist so gewählt, daß die effektiv erreichbare Einstellgenauigkeit bei der Kompensation die Ablesegenauigkeit am Gradbogen weder nennenswert überschreitet, noch unterschreitet. Es trifft dies zu, wenn das Glimmerplättchen im mittleren Teile des sichtbaren Spektrums einen Gangunterschied zwischen etwa 50 und 70 $m\mu$ hat. Damit man die Vorzeichen der gemessenen Parameter in Übereinstimmung mit der in Teil II, E, 6 entwickelten Theorie erhält, muß die Schwingungsrichtung des Polarisators vertikal stehen und die Schwingungsrichtung (n_γ) im Glimmerplättchen bei Einstellung seines Ableseindex auf die Mitte des Gradbogens von links nach rechts verlaufen.

Die Messungen werden in der Regel mit Trockensystemen ausgeführt: in den meisten Fällen wird man das Objektiv 3 b verwenden. Der Tubusanalysator wird für den Meßvorgang nicht gebraucht und muß immer ausgeschaltet sein. Als Lichtquelle kann man für die Beobachtung im weißen Licht eine beliebige Glühbirne, z. B. die Niedervoltlampe Monla benutzen. Um in solchem Falle einen definierteren optischen Schwerpunkt zu haben, empfiehlt es sich, das der Einrichtung beigelegte Lichtfilter in die Fassung der Beleuchtungslinse des Opakilluminators einzusetzen. Es besteht aus zwei je 1 mm dicken Scheiben der Schottschen Gläser OG 4 und BG 18. Der optische Schwerpunkt dieser Kombination in Verbindung mit der Monlalampe liegt bei 575 $m\mu$. Dieses Filter hat nicht den Zweck, monochromatisches Licht herzustellen, sondern soll nur den Schwerpunkt des benutzten Lichts unter Ausschaltung der Randteile des sichtbaren Spektrums bei Belassung möglichst großer Helligkeit sicherer definieren. Für Dispersionsmessungen im einfallenden Licht kann

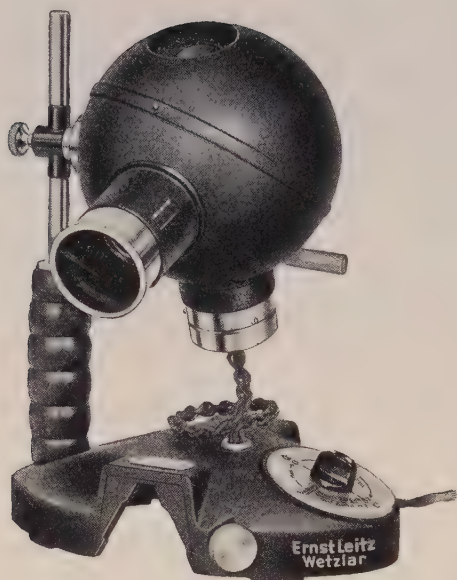


Abb. 14. Monochromatorlampe mit auswechselbaren Spektrallampen.

man die neue von E. LEITZ hergestellte Monochromatorlampe mit auswechselbaren Spektrallampen (Abb. 14) oder einen lichtstarken Monochromator (Abb. 15) benutzen.

Bei orthoskopischer Beobachtung wirken die Irisblende im Innern des Opakilluminators und die Irisblende im Okular als Gesichtsfeldblenden, die Irisblende und die Halbblende an der Beleuchtungslinse vor dem Opakilluminator als Aperturblende. Die orthoskopische Beobachtung kommt nur bei ausgeschaltetem Okularanalysator zur Fokussierung des Anschliffs und zur Einstellung des Prismas im Opakilluminator zur

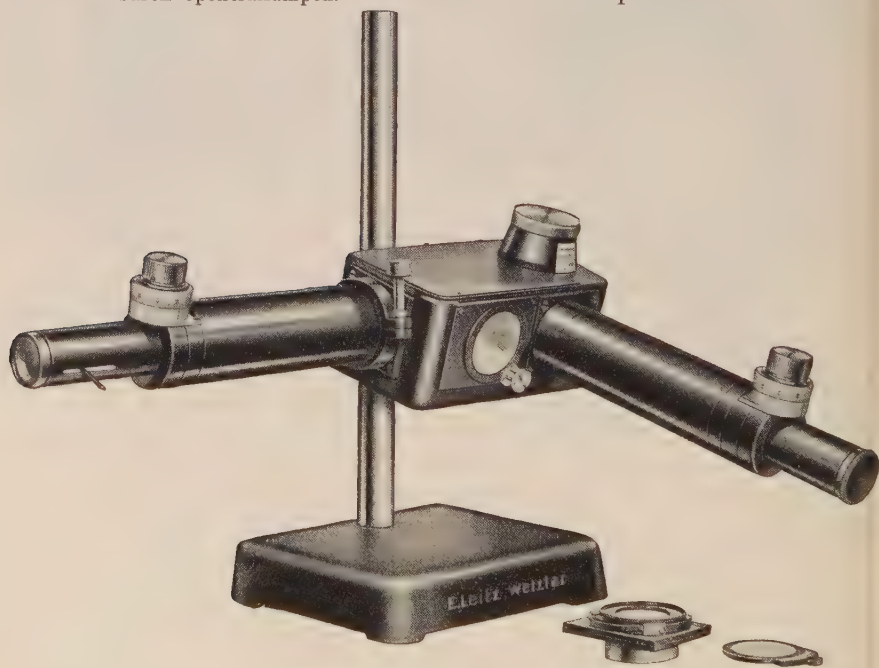


Abb. 15. Lichtstarker Monochromator.

Anwendung. Mittels der Okularirisblende grenzt man einen homogenen Teil des Anschliffs von nicht zu großer Ausdehnung ab. Für

alle Beobachtungen bei eingeschaltetem Okularanalysator benutzt man zweckmäßig die konoskopische Beobachtungsweise.

3. Vorteile der konoskopischen Beobachtung

Führt man die Vorschlaglupe über dem Okular in den Strahlengang und fokussiert sie auf die Austrittspupille des Mikroskops, so beobachtet man konoskopisch. Dann wird die an der Beleuchtungslinse vor dem Opakilluminator sitzende Irisblende als Gesichtsfeldbegrenzung gesehen. Diese konoskopische Beobachtungsweise hat für die Messung bemerkenswerte Vorteile: Die Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols ist unvergleichlich leichter zu erkennen, so daß man auch ganz schwache Anisotropieeffekte ohne Benutzung intensiver Lampen gut beobachten kann. Es leitet sich dies aus der viel niederen Vergrößerung im konoskopischen Sehfeld her.

Alle Messungen sollen bei möglichst genau senkrechtem Lichteinfall ausgeführt werden. Die Anwendung von Strahlenbündeln größerer Öffnung macht die Erscheinungen rasch zunehmend undefiniert. Man kann sich davon überzeugen, wenn man bei orthoskopischer Beobachtung zwischen gekreuzten Nicols das Objektiv gegen ein anderes mit höherer Apertur auswechselt, ohne dabei gleichzeitig die Öffnung der Aperturirisblende zu verändern. Die Farben des Anschliffs verblassen dann, und die Deutlichkeit der Anisotropieeffekte läßt nach. Bei konoskopischer Beobachtung liegen aber die Verhältnisse durchaus anders. Die Erscheinungen in der Mitte des konoskopischen Bildes entsprechen, wenigstens bei nicht zu großer Ausdehnung des orthoskopischen Sehfeldes, unabhängig von der benutzten Apertur der Strahlenbündel immer nur denjenigen Strahlen, die genau senkrecht am Anschliff reflektiert werden. Wir messen also bei Beobachtung der Erscheinungen in der Mitte der Austrittspupille des Mikroskops genau entsprechend den Forderungen der Theorie, selbst dann, wenn der Anschliff mit Strahlenkegeln großer Öffnung beleuchtet wird. Nach Ausführung der Kompensation liegt in der Mitte des konoskopischen Bildes ein dunkler, in weißem Licht immer etwas farbiger Streifen, dessen geringe Breite andeutet, wie stark die Ergebnisse der Reflexion vom Einfallswinkel, also von der benutzten Apertur abhängen. Dieser Kompensationsstreifen ist bei der Messung immer in den zentralen Teil des konoskopischen Bildes einzustellen, um sicher zu sein, daß die Kompensation genau die senkrecht auf den Anschliff einfallenden Strahlen betrifft.

Schließlich hat die konoskopische Beobachtung noch den Vorteil, daß sie sowohl Fehler in der Beleuchtung und Justierung sowie auch schädliche Doppelbrechung in den optischen Elementen leicht erkennen läßt.

4. Justierung

Zur Fokussierung des Anschliffs schaltet man den Okularanalysator aus. Ferner müssen die Irisblende an der Beleuchtungslinse vor dem Opakilluminator und die Irisblende im Okular zunächst ganz geöffnet sein. Nach Fokussierung eines isotropen Anschliffs justiert

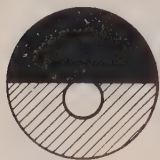


Abb. 16. Bild der richtig zentrierten Aperturirisblende in der Austrittspupille des Mikroskops.

man in bekannter Weise unter Zuhilfenahme der Irisblende im Opakilluminator die Stellung der Collimatorlinse im Innern des Opakilluminators und die Neigung des ablenkenden Prismas im Opakilluminator und zentriert auch das Objektiv. Schaltet man nun die Vorschlaglupe über dem Okular ein und fokussiert sie auf die Austrittspupille des Mikroskops, so erkennt man sofort eventuelle Mängel der Zentrierung, die man durch seitliches Verschieben oder Höhenänderung der Lichtquelle leicht beseitigt. Man schließt dann die Irisblende an der

Beleuchtungslinse vor dem Opakilluminator, bis ihr Bild in der Austrittspupille nur einen kleinen Teil der Objektivapertur frei gibt. Durch Betätigung des Schraubchens unterhalb der Beleuchtungslinse gibt man diesem Bilde die in der Abb. 16 dargestellte Lage.

5. Nullagen des Analysators und des Glimmerplättchens

Der Polarisator wird auf den Indexstrich 0 oder 180 eingestellt: seine Schwingungsrichtung liegt dann vertikal. Eine vollkommen genaue Ausrichtung dieser Schwingungsrichtung parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators ist bei Verwendung des Kompensationsprismas im Opakilluminator nicht erforderlich. Als Objekt benutzt man einen isotropen Anschliff mit starkem Reflexionsvermögen. Bei zunächst ausgeschaltetem Glimmerplättchen betätigt man unter konoskopischer Beobachtung den Okulartriebknopf des Analysators, bis optimale Auslöschung im zentralen Teil des konoskopischen Bildes eintritt. Um hierbei störendes Nebenlicht auszuschalten, ist es zweckmäßig, die Okularirisblende mäßig, aber nicht zu weit zu schließen. Auch empfiehlt es sich, die Irisblende im Innern des Opakilluminators bis zum Anschlag zu schließen. Nach Einschaltung des Glimmerplättchens dreht man auch dieses auf Auslöschung ein. Die letzten Feinheiten der Einstellung erreicht man durch kleine abwechselnde Drehbewegungen des Glimmerplättchens und des Analysators. Die Ablesungen am Gradbogen des Okulars mit Hilfe der beiden Nonien ergeben am oberen Nonius die Nullage des Analysators und am unteren Nonius die Nullage des Glimmerplättchens. Sie werden mit a_0 und g_0 angemerkt. Am besten nimmt man die Mittelwerte aus etwa fünf Einstellungen. Diese werden sicher auf mindestens $0,1^\circ$ genau. Die

ermittelten Nullagen behalten solange Geltung, als man an der Einstellung des Polarisators nichts verändert.

6. Prüfung der optischen Elemente auf Spannungsfreiheit

Der elliptische Analysator ist ein vorzügliches Mittel, um geringste Spannungsdoppelbrechung in den optischen Elementen festzustellen. Zu diesem Zwecke stellt man die Azimute des Glimmerplättchens und des Analysators genau auf die zuvor ermittelten Nullagen g_0 und a_0 ein und beobachtet die Erscheinungen im konoskopischen Bild unter rasch wechselndem Ein- und Ausschalten des Glimmerplättchens. Die geringste Spannungsdoppelbrechung in irgendwelchen optischen Teilen läßt dann auffallend deutliche Veränderungen der Helligkeitsverteilung im konoskopischen Bild erkennen. Selbst so kleine Beträge der Doppelbrechung, die, mit dem BEREK-Kompensator geprüft, noch keine meßbare Auflösung des dunklen Kreuzes erkennen lassen, werden mit dem elliptischen Analysator bei raschem Ein- und Ausschalten des Glimmerplättchens ganz augenfällig. In den meisten Fällen wird das Mikroskopobjektiv die Ursache der Spannungsdoppelbrechung sein. Man braucht aber hier nicht zu ängstlich zu sein. Selbst bei stärkerer Spannungsdoppelbrechung wird nur die Präzision der Kompensation vermindert, ohne daß hiermit eine grobe, prinzipielle Fälschung der Meßergebnisse verbunden wäre. So lange die Spannungsdoppelbrechung der optischen Elemente so klein bleibt, daß beim Herausziehen des Glimmerplättchens der Auslöschungstreifen bei mäßiger Öffnung der Aperturblende nicht ganz aus dem konoskopischen Sehfeld herauswandert, ist sie, wie eingehend untersucht wurde, ganz unbedenklich. Man wird auch selten Objektive finden, die bei dieser sehr strengen Prüfung gar keine Spur von Doppelbrechung erkennen lassen.

7. Vorgang der Messung

Der Anschliff wird bei ausgeschaltetem Analysator orthoskopisch fokussiert und hierauf die Irisblende im Opakilluminator bis zum Anschlag und die Irisblende in der Gesichtsfeldebene des Okulars mindestens entsprechend geschlossen. Die weitere Beobachtung erfolgt konoskopisch. Dreht man den Objektisch, so darf das Bild der Austrittspupille nicht schlagen; anderenfalls ist der Anschliff mit einer Handpresse gut auszurichten. Glimmerplättchen und Analysator werden genau in die zuvor ermittelten Nullagen g_0 , a_0 eingestellt. Bei Betätigung der Objektischdrehung wird dann auch die allerschwächste Anisotropie des Anschliffs sofort erkennbar. Man stellt durch Drehen des Objektisches zwei aufeinander folgende Auslöschungslagen des Anschliffs ein. Ihre Azimute seien, an der Gradteilung des Objektisches abgelesen, o' und o'' . Bringt man nun den Objektisch in das

Azimut mit der Gradziffer $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')$, so steht der Anschliff in der „ersten Diagonallage“, und das konoskopische Bild erscheint aufgehellt. Durch zunächst grobes, später vorsichtiges abwechselndes Drehen des Glimmerplättchens und des Analysators erzeugt man sukzessive möglichst vollkommene Kompensation im Zentrum des konoskopischen Bildes. Die Ablesung der schließlichen Einstellungen am Gradbogen des Okulars seien für den Analysators α_1 und für das Glimmerplättchen g_1 . Hierauf bringt man mittels der Objektischdrehung den Anschliff in die „zweite Diagonallage“ $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$ und ermittelt für diese ebenso die kompensierenden Einstellungen. Sie seien α_2, g_2 . Damit ist die Messung beendet.

Die kompensierenden Einstellungen α, g , ändern sich beim Wechsel der Lichtart und des Immersionsmediums.

8. Verwendung der Meßergebnisse

Es stehen nun folgende Ergebnisse der Messung zur Verfügung:

1. Die Nullagen des Analysators und des Glimmerplättchens: α_0, g_0 .
2. Die Auslöschungslagen des Anschliffs: $\alpha' \alpha''$.
3. Die kompensierenden Einstellungen in der ersten Diagonallage des Anschliffs: α_1, g_1 .
4. Die kompensierenden Einstellungen in der zweiten Diagonallage des Anschliffs: α_2, g_2 .
5. Die in der Eich Tabelle vermerkten Funktionen des Gangunterschieds im Glimmerplättchen: C, S.

Die wahre Lage der Schwingungsrichtungen im Anschliff. — Die Schwingungsrichtungen im Anschliff liegen parallel zu den bei orthoskopischer Beobachtung sichtbaren Richtungen des Okularfadenskreuzes, wenn man den Index des Objektisches auf die Gradziffer $\frac{\alpha' + \alpha''}{2} \pm 45^\circ$ einstellt. Nach Ausschaltung des Ana-

lysators kann man ihre Lage leicht auf etwa vorhandene Spuren erkennbarer Strukturelemente im Anschliff beziehen. Durch Anwendung komplizierterer Hilfsmittel, wie Halbschattenmethoden oder empfindlicher Farben, läßt sich die effektive Genauigkeit in der Ermittlung der Lage der Schwingungsrichtungen über das bereits durch die konoskopische Methode erreichbare Maß kaum hinaus steigern.

Die Art der Schwingungszustände im Anschliff. — Hierüber geben die drei Paare der Meßelemente α, g Aufschluß. Man prüft, ob diese gleichzeitig den beiden folgenden Beziehungen, die wir als Symmetriebedingungen bezeichnen, genügen:

$$4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_0 &= 0 \\ \frac{1}{2}(g_1 + g_2) - g_0 &= 0 \end{aligned}$$

Sind diese beiden Bedingungen innerhalb der erreichten Meßgenauigkeit, die man leicht abzuschätzen lernt, gleichzeitig erfüllt, so sind die in den Anschliff eindringenden Wellen linear polarisiert, oder ihre Elliptizität ist zum mindesten sehr klein. Ist auch nur eine der beiden Bedingungen sichtlich nicht erfüllt, so sind die in den Anschliff eindringenden Wellen in stärkerem Maße elliptisch polarisiert. In diesem Falle weiß man, daß der Kristall niedere Symmetrie besitzt, und daß der Anschliff schief gegen etwaige Symmetrieebenen liegt.

Anschliffe mit starken Verstößen gegen die Symmetriebedingungen findet man relativ selten. Es ist das leicht erklärlich: Einmal sind Erzminerale mit niederer Symmetrie relativ seltener. Außerdem vermindert sich die Deutlichkeit der Anisotropie eines Anschliffs mit zunehmender Stärke der Elliptizität immer mehr. Bei nahezu zirkularen Schwingungszuständen sind die Anisotropieeffekte nicht mehr wahrnehmbar. Es werden daher im allgemeinen stärkere Verstöße gegen die Symmetriebedingungen nur an sehr schwach anisotropen Schnitten solcher Kristalle auftreten. Dagegen wird man bei stärker anisotropen Anschliffen in der Regel feststellen, daß sich die Symmetriebedingungen fast stets innerhalb der Fehlergrenzen der Messung erfüllt erweisen.

Die Anisotropieparameter. — Sie sind sämtlich spezielle Funktionen der Brechungsindizes, der Absorptionskoeffizienten und der Elliptizität der in den Anschliff eindringenden Wellen sowie der Lichtbrechung des Immersionsmediums. Für die praktischen Bedürfnisse ist die Kenntnis dieser Funktionen im einzelnen nicht erforderlich, da man die Bedeutung der Anisotropieparameter auch anschaulich erläutern kann. Sie lassen sich sämtlich auf zwei zurückführen. Den einen bezeichnen wir als Polarisationskoeffizienten ε , den anderen als Phasenkoeffizienten δ . Bei dem von uns gewählten Meßverfahren ist, wie unter II, E, 6 näher ausgeführt, der Polarisationskoeffizient nahezu gleich dem im Bogenmaß gemessenen Azimut der großen Achse der reflektierten Schwingungsellipse gegen die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts und der Phasenkoeffizient nahezu gleich dem Achsenverhältnis der reflektierten Schwingungsellipse. Auch durch andere Beziehungen lassen sich die Bedeutungen von ε und δ anschaulich erläutern: Denken wir uns das einfallende Licht unpolarisiert, so ist zufolge der Anisotropie des Anschliffs das reflektierte Licht teilweise polarisiert. Wenn R_1 und R_2 die beiden uniradialen, d. h. Hauptreflexionsvermögen des Anschliffs bedeuten, wird der Polarisationsgrad des reflektierten Lichts bei einfallendem unpolarisiertem Licht durch

$$5) \quad p = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

gemessen. Zwischen dem Polarisationsgrad und dem Polarisationskoeffizienten besteht aber sehr näherungsweise die einfache Beziehung

$$6) \quad p = 2\varepsilon$$

Den beiden uniradial reflektierten Komponenten wird bei ihrer Entstehung eine relative Phasendifferenz Δ_n aufgeprägt. Diese ist immer sehr klein, und zwischen ihr und dem Phasenkoeffizienten besteht die sehr näherungsweise gültige Beziehung

$$7) \quad \Delta_n = -2\delta$$

Für das Verhältnis der beiden uniradialen Reflexionsvermögen gilt ebenfalls sehr näherungsweise

$$8) \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

Die relative Anisotropie wird durch

$$9) \quad \nu = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}$$

definiert. Sie ist proportional zu dem absoluten Betrage der komplexen Doppelbrechung des Anschliffs, also zu der Größe

$$\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}.$$

Den aus dem Quotienten von δ und ε gemäß

$$10) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

zu berechnenden Winkel τ bezeichnen wir als den charakteristischen Winkel des Anschliffs. Er stellt ebenfalls eine relative Phasendifferenz dar, aber nicht die der uniradial reflektierten Komponenten, sondern diejenige relative Phasendifferenz, die für die Umwandlung der reflektierten Schwingungsellipse in eine lineare Schwingung notwendig wird, wenn man eine Zerlegung der Ellipse in ihre Komponenten parallel und senkrecht zu der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts vornimmt. Dieser Winkel τ wird mit verschwindender Absorption gleich Null. Er hat weiterhin die bemerkenswerte Eigenschaft, daß er für alle Anschliffrichtungen eines und desselben optisch einachsigen Kristalls nicht nur dasselbe Vorzeichen behält, sondern auch nahezu denselben absoluten Betrag (Abb. 35). Es ist also näherungsweise bei solchen Kristallen dieser Winkel nicht nur für den Anschliff, sondern auch für das Mineral charakteristisch. Im Gegensatz dazu treten bei optisch zweiachsigen Kristallen, mit der Anschliffrichtung wechselnd, bei demselben Mineral für τ alle Werte zwischen -90° und $+90^\circ$ auf. Die Bestimmung von τ an zwei Anschliffen desselben Minerals mit deutlich unterschiedlichem Anisotropieeffekt zwischen gekreuzten Nicols ermöglicht also einen weiteren Entscheid über den optischen Symmetriecharakter des Minerals. Die Tabelle 1 veranschaulicht dies an zwei Beispielen, die beide Anschliffe von derben Stücken der genannten Mineralien betreffen. Daß die Messungen an Durchschnitten mit unterschied-

lichen Anisotropieeffekten erfolgt sind, zeigt der jedesmal mitbestimmte Wert der relativen Anisotropie. In dem Falle des einen Minerals erweist sich τ praktisch als unabhängig von der Anschliffrichtung, in dem Falle des anderen Minerals dagegen als stark abhängig.

Tabelle 1. Charakteristischer Winkel und relative Anisotropie

$$\lambda_0 = \text{ca. } 540 \text{ m}\mu; n_0 = 1$$

| Rotnickelkies (Sangerhausen) | | Antimonglanz (Shikoku) | |
|------------------------------|-------|------------------------|-------|
| τ | ν | τ | ν |
| + 47,3° | 0,037 | — 19,6° | 0,077 |
| + 47,4 | 0,032 | — 12,0 | 0,053 |
| + 46,9 | 0,022 | + 1,8 | 0,032 |
| + 47,8 | 0,018 | — 10,2 | 0,031 |
| | | — 2,7 | 0,021 |
| | | + 20,8 | 0,018 |

Mit Hilfe des charakteristischen Winkels ergibt sich noch eine anschauliche Deutung für den Parameter der relativen Anisotropie. ν kann gedeutet werden als trigonometrische Tangente des Azimuts derjenigen linearen Schwingung gegen die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts, in welche die reflektierte Schwingungsellipse nach Hinzufügung der relativen Phasendifferenz τ zu ihren parallel und senkrecht zur Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts genommenen Komponenten übergeht.

Einfluß der Oberflächenschichten. — Alle diese Parameter werden entsprechend den wahren Verhältnissen der Brechung und Absorption des Lichts im Kristall nur auf Bruch- und Spaltflächen richtig gemessen. Die Übergangsschichten, die sich auf solchen Flächen schon binnen kurzem von selbst bilden, beeinflussen die Meßergebnisse bei senkrechtem Lichteinfall so gut wie gar nicht. Dagegen ist der Einfluß des Schleifens und Polierens von wesentlich anderem Ausmaß und auch hinsichtlich der einzelnen Anisotropieparameter sehr unterschiedlich. In der Lage der Auslöschungsrichtungen und in der Erfüllung der Symmetriebedingungen tritt durch das Schleifen und Polieren eine Änderung nicht ein. Weiterhin wird, abgesehen von ganz übermäßigen Eingriffen, prozentual am wenigsten und in der Regel kaum merklich der Parameter $R_2:R_1$, also das Verhältnis der beiden uniradiellen Reflexionsvermögen, verändert. Auch beim Polarisationskoeffizienten ε ist bei einigermaßen vorschriftsmäßigem Schleifen und Polieren der Einfluß im allgemeinen sehr gering. Dagegen wird unter Umständen erheblich der Phasenkoeffizient δ verändert und damit, sofern im Einzelfalle ε nicht wesentlich größer ist als δ , auch die relative Anisotropie ν . Weitaus am stärksten macht sich der Einfluß des Schleifens und Polierens auf den Wert des charakteristischen Winkels τ geltend. Dieser ergibt sich durch die Wirkung der Oberflächenschicht immer kleiner bzw. in negativer Richtung verändert.

Man darf daher diesen Winkel zur Unterscheidung des Symmetriecharakters mit Sicherheit nur dann benutzen, wenn er an verschiedenen Durchschnitten in ein und demselben Anschliff ermittelt ist. Dasjenige Schleif- und Polierverfahren ist das beste, welches jeweils die höchsten Werte für τ liefert. Ein Beispiel für den Einfluß des Schleifens und Polierens ist in Tabelle 5, Abschnitt II, E, 7, wiedergegeben.

9. Auswertung der Anisotropieparameter

Man berechnet zunächst aus den kompensierenden Einstellungen a, g die Winkel

$$11) \quad \varphi = \frac{1}{2}(g_1 - g_2); \quad \sigma = \frac{1}{2}(a_1 - a_2).$$

Man hat hierbei, wie im folgenden immer, die sich ergebenden Vorzeichen zu beachten. φ und σ sind die kompensierenden Drehungen des Glimmerplättchens und des Analysators. Die Auswertung kann graphisch oder rechnerisch durchgeführt werden.

Graphische Auswertung. — Man benötigt hierzu die in den Abb. 17, 18, 19 dargestellten drei Diagramme. Das erste Diagramm ist gewissermaßen das Eichdiagramm des Glimmerplättchens.

Man entwirft es auf

1 mm- oder besser auf 2 mm-Koordinatenpapier. Die Vertikalachse bezeichnet man mit φ , die Horizontalachse mit σ und teilt beide Achsen linear im Gradmaß ein, die φ -Achse positiv nach oben, die σ -Achse positiv nach rechts, so daß man $0,1^\circ$ gut ablesen kann. Das Feld wird mit zwei Scharen von Geraden durchzogen, die wir als ε -Schar und als δ -Schar unterscheiden. Die Neigung α der ε -Schar gegen die σ -Achse ergibt sich aus

$$12) \quad \operatorname{tg} \alpha = - \frac{C}{1 - C}$$

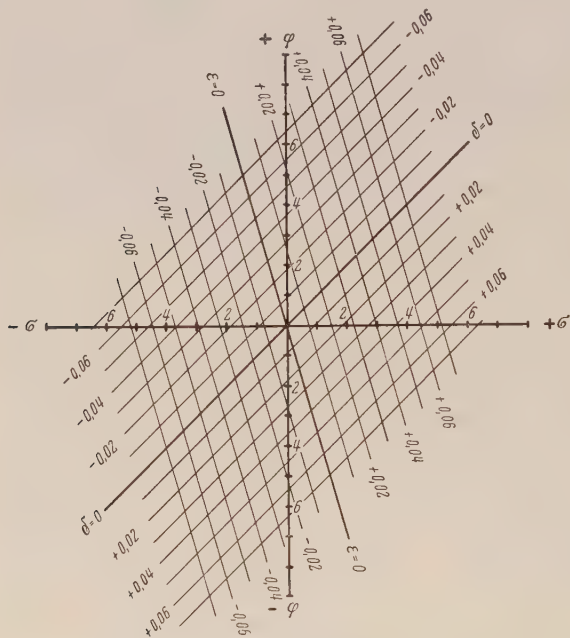


Abb. 17. Diagramm zur graphischen Auswertung des Polarisationskoeffizienten ε und des Phasenkoeffizienten δ .

wo C die in der Eich-tabelle des Kompensatorokulars für das Glimmerplättchen angegebene Konstante zu der gewählten Lichtart ist. Die Neigung der δ -Schar gegen die σ -Achse beträgt immer genau $\beta = +45^\circ$. Um die Geraden beider Scharen zu zeichnen, braucht man noch ihre Durchstoßpunkte mit einer der Achsen. Für die Durchstoßpunkte der ε -Schar mit der σ -Achse gilt im Gradmaß

$$13) \quad \sigma_\varepsilon = 57,3 \frac{\varepsilon}{C}$$

und für die Durchstoßpunkte der δ -Schar mit der σ -Achse ebenfalls im Gradmaß

$$14) \quad \sigma_\delta = 57,3 \frac{\delta}{S}$$

wo S die zweite in der Eich-tabelle angegebene Konstante des Glimmerplättchens ist.

Das zweite und das dritte Diagramm gelten unabhängig von den Eigenschaften des betreffenden Glimmerplättchens. Im zweiten Diagramm, für welches man käufliches Polarkoordinatenpapier verwendet, bezeichnet man die Vertikalachse mit δ , die Horizontalachse mit ε , wieder positiv nach oben bzw. nach rechts. Die Bezifferung der Azimute einschließlich der Vorzeichen erfolgt wie in der Abb. 18. Die Beschriftung der konzentrischen Kreise entspricht den Koordinatenwerten ihrer Schnittpunkte mit den Achsen. Zur

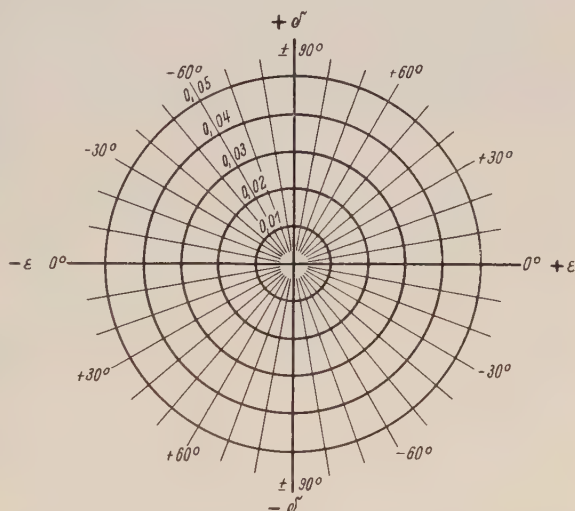


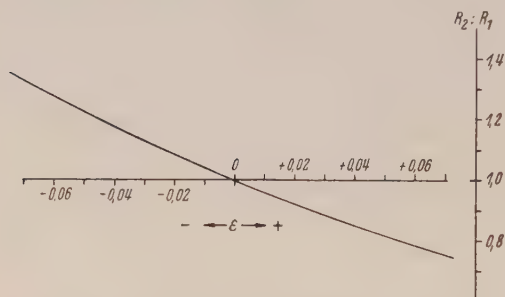
Abb. 18. Diagramm zur graphischen Auswertung der relativen Anisotropie r und des charakteristischen Winkels τ .

(Tabelle siehe nächste Seite.)

Diese drei Diagramme werden nun in folgender Weise zur Bestimmung der Anisotropieparameter verwandt: Man geht mit den nach 11) berechneten Winkeln φ und σ unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen in das erste Diagramm ein und liest in dem Feldpunkt, der das Paar φ, σ darstellt, an den beiden Geradenscharen durch Interpolation

Tabelle 2. Zusammenhang zwischen ε und $R_2 : R_1$

| ε | $R_2 : R_1$ | ε | $R_2 : R_1$ |
|---------------|-------------|---------------|-------------|
| -0,07 | 1,324 | +0,01 | 0,961 |
| -0,06 | 1,272 | +0,02 | 0,923 |
| -0,05 | 1,222 | +0,03 | 0,887 |
| -0,04 | 1,174 | +0,04 | 0,852 |
| -0,03 | 1,128 | +0,05 | 0,819 |
| -0,02 | 1,083 | +0,06 | 0,786 |
| -0,01 | 1,041 | +0,07 | 0,755 |
| 0,00 | 1,000 | | |

Abb. 19. Diagramm zur graphischen Auswertung des Verhältnisses $R_2 : R_1$ der beiden uniradialen Reflexionsvermögen.

die Koeffizienten ε und δ ab. Mit diesen findet man aus dem zweiten Diagramm, an der Azimutalteilung interpoliert, den Winkel τ und, zwischen den konzentrischen Kreisen interpoliert, die relative Anisotropie ν . Schließlich ergibt sich mittels des dritten Diagramms aus ε der Wert von $R_2 : R_1$. τ und ν erhält man unabhängig von der Reihenfolge der Diagonalstellungen des Anschliffs. Dagegen ändern ε und δ bei Vertauschung der Reihenfolge der Diagonallagen ihr Vorzeichen, und $R_2 : R_1$ geht hierbei in den reziproken Wert über. In dem Verhältnis $R_2 : R_1$ entspricht der Index 1 immer derjenigen Schwingungsrichtung im Anschliff, die bei der Messung in der ersten Diagonallage entgegen dem Umlaufsinn des Uhrzeigers den Winkel 45° mit der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts gebildet hat.

Die Genauigkeit dieser graphischen Auswertung reicht für die Anforderungen, die in der mineralogischen Praxis gestellt werden, vollständig aus, aber sie erschöpft bei weitem nicht den bei der Messung erreichten Genauigkeitsgrad. Zu diesem Zwecke müßte man die Diagramme in sehr großem Maßstabe zeichnen.

Die Genauigkeit dieser graphischen Auswertung reicht für die Anforderungen, die in der mineralogischen Praxis gestellt werden, vollständig aus, aber sie erschöpft bei weitem nicht den bei der Messung erreichten Genauigkeitsgrad. Zu diesem Zwecke müßte man die Diagramme in sehr großem Maßstabe zeichnen.

Numerische Auswertung. — Mit Hilfe der nach 11) berechneten Winkel φ und σ im Gradmaß und der Kompensatorkonstanten C und S findet man ε und δ nach folgenden Näherungsformeln:

$$15) \quad \varepsilon = 0,0175 \{ \varphi + (\sigma - \varphi) C \}$$

$$\delta = 0,0175 (\sigma - \varphi) S$$

Strenge Formeln für diese Parameter sind im Abschnitt II, E, 6 unter 146) entwickelt; doch kann von ihrer Benutzung in der Regel abgesehen werden, da die vorstehenden Näherungsformeln die Werte

von ε und δ in einer Genauigkeit ergeben, wie sie erst bei sehr großer maßstäblicher Darstellung der Diagramme nach der graphischen Methode erreichbar wäre. Mit ε und δ findet man die Parameter $R_2 : R_1$, ν und τ aus 8), 9) und 10).

Die vorstehend beschriebenen Auswertungen sind für alle Immersionsmedien gültig; die resultierenden Werte der Anisotropieparameter ändern sich aber mit dem Immersionsmedium.

10. Bestimmung der Brechungsindizes bei sehr schwacher Absorption

Die Bestimmung der Anisotropieparameter im Auflicht kann gelegentlich auch für schwach absorbierende oder vollkommen durchsichtige Kristalle Bedeutung erhalten, z. B. dann, wenn sich die Kristalle aus technischen Gründen nicht so dünn herstellen oder schleifen lassen, daß durchfallendes Licht anwendbar wird. Sofern die Absorptionskoeffizienten sehr klein sind, ist die reflektierte Schwingung praktisch linear. Für die kompensierenden Einstellungen des Glimmerplättchens und des Analysators wird dann $\varphi = \sigma$, d. h. das Glimmerplättchen ist hier gar nicht erforderlich. In solchem Falle kann man die Doppelbrechung und die Brechungsindizes des Anschliffs auch im Auflicht direkt bestimmen. Hierzu muß man abwechselnd zwei verschiedene Immersionen anwenden, z. B. das eine Mal Luft und das zweite Mal Wasser oder Öl. Die Kompensation wird dann beide Male in der Diagonallage des Anschliffs bei ausgeschaltetem Glimmerplättchen allein durch Drehung des Analysators bewirkt. Im Interesse größerer Genauigkeit empfiehlt es sich, hier ebenfalls die Messungen für beide Diagonalstellungen des Anschliffs auszuführen. Für das erste Immersionsmedium mit dem Brechungsindex n_0' seien die kompensierenden Einstellungen des Kompensators, am Gradbogen abgelesen, in der ersten Diagonallage a_1' und in der zweiten Diagonallage a_2' ; entsprechend seien für das zweite Immersionsmedium mit dem Brechungsindex n_0'' die Ablesungen für die zugehörigen Kompensationsstellungen a_1'' und a_2'' . Dann berechnet sich streng die Doppelbrechung des Kristalls in Richtung der Mikroskopachse aus

$$16) \quad n_2 - n_1 = \frac{(n_0'^2 - n_0''^2) \operatorname{tg} \frac{a_1' - a_2'}{2} \operatorname{tg} \frac{a_1'' - a_2''}{2}}{n_0' \operatorname{tg} \frac{a_1'' - a_2''}{2} - n_0'' \operatorname{tg} \frac{a_1' - a_2'}{2}}$$

Die Vorzeichen der Differenzen $a_1 - a_2$ müssen hierbei genau beachtet werden. Ferner gilt für das Produkt der Brechungsindizes

$$17) \quad n_2 \cdot n_1 = n_0' n_0'' \frac{n_0'' \operatorname{tg} \frac{a_1'' - a_2''}{2} - n_0' \operatorname{tg} \frac{a_1' - a_2'}{2}}{n_0' \operatorname{tg} \frac{a_1'' - a_2''}{2} - n_0'' \operatorname{tg} \frac{a_1' - a_2'}{2}}$$

Aus der Differenz der Brechungsindizes und ihrem Produkt lassen sich dann in bekannter Weise die Brechungsindizes leicht einzeln berechnen.

D. Messung des Reflexionsvermögens

1. Allgemeines

Bei isotropen Substanzen ist das Reflexionsvermögen abhängig vom Einfallswinkel und von der Orientierung der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts gegen die Einfallsebene. In Abb. 20 ist das Reflexionsvermögen für vier isotrope Substanzen in Abhängigkeit vom Einfallswinkel und für die Fälle, daß die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts senkrecht bzw. parallel zur Einfallsebene liegt,



Abb. 20. Reflexionsvermögen in Abhängigkeit vom Einfallswinkel. — Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene. ---- Schwingungsrichtung parallel zur Einfallsebene.

dargestellt. Unter dem Reflexionsvermögen schlechthin pflegt man das Verhältnis des reflektierten Lichts zum einfallenden Licht für den Einfallswinkel Null zu verstehen. Da bei den Messungen niemals mit genau senkrecht einfallendem Licht beobachtet wird, sondern stets Strahlenbündel von mäßiger Öffnung benutzt werden, bestimmt man das Reflexionsvermögen für den Einfallswinkel Null weder, wenn die Schwingungsrichtung des Polarisators senkrecht, noch wenn sie parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators liegt. Weiterhin ist komplizierend, daß das Reflexionsvermögen immer auf das einer Eichnormale bezogen gemessen wird und die Abhängigkeit vom Einfallswinkel

für beide Substanzen im allgemeinen um so unterschiedlicher ist, je ungleicher ihr Reflexionsvermögen ist. Hierdurch ergibt sich mit zunehmender Öffnung der Strahlenbündel ein stark ausgesprochener Gang des relativen, auf eine Normale bezogenen Reflexionsvermögens, sofern die Schwingungsrichtung des Polarisators senkrecht oder parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators liegt. Deutlich ersichtlich ist dies aus Tab. 3, in der Messungen des relativen Reflexionsvermögens von Platin gegen Quarz bei verschiedener Ausnutzung der Objektivapertur wiedergegeben sind. Wenn man innerhalb der Fehlergrenzen der Einstellungen von der wirksamen Apertur unabhängige Ergebnisse für das relative oder absolute Reflexionsvermögen erhalten will, muß man, wie aus den beiden letzten Spalten der Tabelle er-

sichtlich ist, die Schwingungsrichtung des Polarisators unter 45° gegen die Symmetrieebene des Opakilluminators orientieren.

Tabelle 3. Reflexionsvermögen von Platin, auf das von Quarz bezogen, in Abhängigkeit von der wirksamen Objektivapertur und von der Orientierung des Polarisators

| Ausgenutzte numerische Apertur des Objektivs | Schwingungsrichtung des Polarisators zur Symmetrieebene des Opakilluminators | | | |
|---|---|--|--|---|
| | senkrecht $R_{\text{Platin}} : R_{\text{Quarz}}$ | parallel $R_{\text{Platin}} : R_{\text{Quarz}}$ | unter 45° $R_{\text{Platin}} : R_{\text{Quarz}}$ | unter 45° R_{Platin} |
| 0,1 | 15,3 | 16,0 | 15,78 | 0,722 |
| 0,3 | 14,9 | 16,5 | 15,67 | 0,717 |
| 0,6 | 12,4 | 19,4 | 15,73 | 0,720 |
| 0,9 | 11,3 | 21,2 | 15,67 | 0,717 |
| ber. wahrsch. Fehler | $\pm 0,2$ | $\pm 0,2$ | $\pm 0,18$ | $\pm 0,008$ |

Bei anisotropen Medien ist das Reflexionsvermögen auch noch vom Azimut der Schwingungsrichtungen im Anschliff abhängig. Das darf auch bei der Bestimmung des mittleren Reflexionsvermögens eines solchen Anschliffs nicht außer acht gelassen werden. Der erforderliche Meßvorgang ist weiter unten beschrieben.

Recht kompliziert wird die photometrische Messung der uniradi-
dialen Reflexionen, wenn die Ergebnisse einwandfrei sein sollen.
Sie ist aber entbehrlich, da man das Verhältnis der beiden uniradi-
dialen Reflexionsvermögen einfach und sehr genau nach dem in I, C, 9 ge-
schilderten Verfahren mittels des Glimmerkompensators ermitteln kann.
Es ist also stets vorteilhafter, die beiden uniradi-
dialen Reflexionsvermögen R_1 und die Doppelreflexion $R_1 - R_2$ aus dem mittleren Re-
flexionsvermögen R und dem Parameter $R_2 : R_1$ zu berechnen. Hier-
zu dienen die Beziehungen:

$$18) \quad R_1 = \frac{2R}{1 + \frac{R_2}{R_1}}; \quad R_2 = \frac{2R}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 - R_2 = 2R \cdot \frac{1 - \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

Eine solche Bestimmung der uniradi-
dialen Reflexionsvermögen und
der Doppelreflexion wird namentlich bei kleinen Unterschieden von
 R_1 und R_2 wesentlich genauer als die photometrische.

Sind die Reflexionsvermögen R' , R'' gegen zwei verschiedene
Einfallsmedien mit den Brechungsindizes n_0' bzw. n_0'' bekannt, so
lassen sich in vielen Fällen mit guter Sicherheit die zugehörigen

Brechungsindizes n und Absorptionskoeffizienten k des Minerals nach folgenden Formeln berechnen:

$$19) \quad n = \frac{n_o''^2 - n_o'^2}{2 \left\{ n_o'' \frac{1 + R''}{1 - R''} - n_o' \frac{1 + R'}{1 - R'} \right\}}$$

$$k = \sqrt{\frac{(n + n_o'')^2 R'' - (n - n_o'')^2}{1 - R''}} = \sqrt{\frac{(n + n_o')^2 R' - (n - n_o')^2}{1 - R'}}$$

Diese Formeln sind sowohl auf das Reflexionsvermögen isotroper wie auch auf die beiden uniradialen Reflexionsvermögen anisotroper Medien anwendbar.

2. Subjektive Methode

Das Mikrophotometer. — Zur Messung des Reflexionsvermögens kann man sich des in der Abb. 21 dargestellten Mikrophoto-

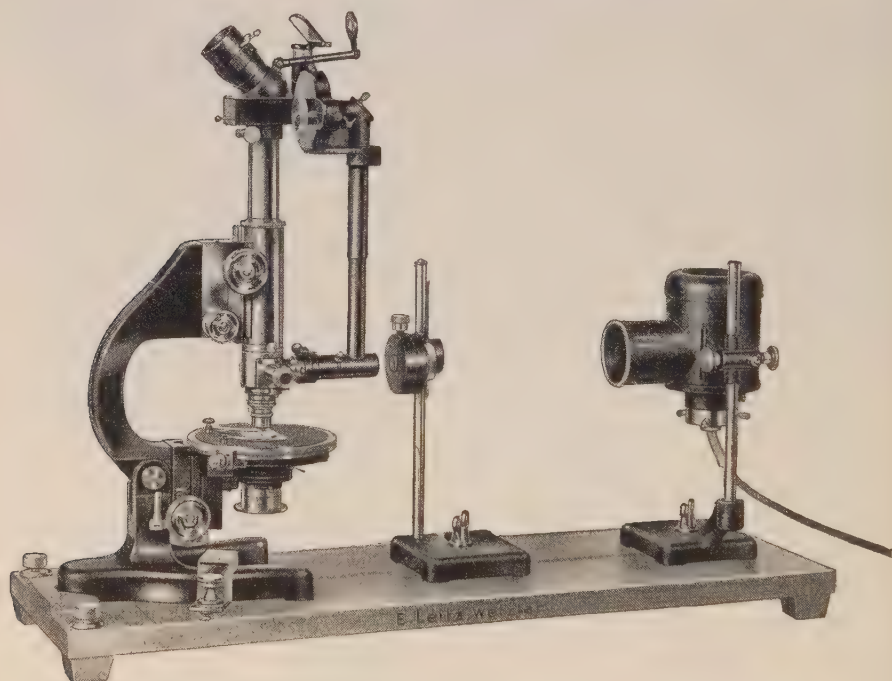


Abb. 21. Mikrophotometer (M. BEREK) zur Messung des Reflexionsvermögens.

mers bedienen. Es wird nach Entfernung des zum Opakilluminator gehörigen Polarisators am Eintrittsstutzen des Opakilluminators und am Tubus des Mikroskops befestigt. Das einfallende Licht wird in zwei verschiedene Wege gelenkt: ein Teil durch einen drehbaren

Polarisator hindurch in den Opakilluminator, der andere Teil in ein Seitenrohr, in welchem kurz vor dessen Einmündung in das Okular die Meßvorrichtung untergebracht ist. Die Intensitäten beider Lichtanteile werden im Gesichtsfeld des Okulars verglichen. Das hierzu dienende Vergleichsprisma kann in den Strahlengang ein- und ausgeschaltet werden. Die Apertur der wirksamen Strahlen muß mittels einer vor der Eintrittsöffnung des Photometers aufgestellten Irisblende oder noch besser mittels einer dort aufgestellten Spaltblende auf eine geringe bis mäßige Öffnung, namentlich in Richtung senkrecht zur Symmetrieebene des Opakilluminators, beschränkt werden. Zur Justierung wird das Vergleichsprisma im Okular eingeschaltet und das Vergleichsfeld durch Betätigung der Meßvorrichtung hinreichend aufgehellte. Dann wird die Hilfslupe über dem Okular vorgeschlagen und auf die Austrittspupillen beider Strahlengänge fokussiert. Die Bilder beider Pupillen werden durch Ausrichten des Photometerkopfes am Tubus und durch richtige Höhen- und Seiteneinstellung der Iris- bzw. Spaltblende vor dem Photometer zunächst grob, hierauf durch Betätigung der Zentrierschrauben an der Knickung des Seitenrohres fein ausgerichtet. In richtig zentriertem Zustande haben die Austrittspupillen bei Benutzung einer Spaltblende die aus Abb. 22 ersichtliche Lage. Dreht man den Objektisch, so dürfen die Pupillen nicht gegeneinander pendeln; anderenfalls ist der Anschliff auf seiner Unterlage mit einer Handpresse besser auszurichten.



Abb. 22. Richtig zentrierte Austrittspupillen des Mikrophotometers.

Bei der Messung muß die Irisblende im Opakilluminator immer bis zum Anschlag geschlossen sein. Die Oberfläche des Anschliffs ist gegen Seitenlicht ausreichend abzuschirmen. Als Lichtquelle benutzt man am besten eine Niedervoltlampe mit Regulierwiderstand. Dieser dient zur Einregulierung einer für die Beobachtung bzw. Messung jeweils günstigen Helligkeit. Die photometrischen Messungen werden bei geringer bis mäßiger Helligkeit genauer als bei großer. Die Betätigung des Regulierwiderstandes kann während der Messungen erfolgen, ohne daß dabei eine Verlagerung der Einstellungen zu befürchten ist. Der Anschliff darf nicht grob defokussiert sein. Bei sehr gut auspolierten Anschliffen erkennt man die Fokussierung nach Ausschaltung des Vergleichsprismas an dem Erscheinen des scharfen Spiegelbildes der im Opakilluminator befindlichen Irisblende.

Eichung. — Zur Eichung des Mikrophotometers kann man in Verbindung mit schwachen Objektiven (bis 3b einschließlich) ein kleines total reflektierendes Prisma benutzen, das in freier

Halterung (Abb. 23) auf den Objektisch aufgelegt wird. Man darf hierbei das Mikroskop nicht auf die Oberfläche des Prismas einstellen, sondern muß wenigstens annähernd die Scheitellkante des rechten Winkels im Prisma fokussieren und dann dieses ein wenig seitlich verschieben, bis die Scheitellkante aus dem Gesichtsfeld des Photometers verschwindet. Das Reflexionsvermögen eines solchen Prismas

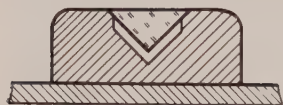


Abb. 23. Totalreflektierendes Prisma (S. Rösch) zur Eichung des Mikrophotometers.

ist, wenn es aus gewöhnlichem Prismenglas besteht, 0,918 gegen Luft und 1,00 gegen Zedernholzöl.

Für beliebige Objektive kann die Eichung mit Mineralien von bekanntem Reflexionsvermögen ausgeführt werden. Dabei ist nach den Ausführungen in II, E, 7 zu beachten, daß die sicherste Eichbasis ein Mineral mit hohem Brechungsindex, aber kleinem Absorptionskoeffizienten liefert. Ein solches Mineral ist die gelbe Zinkblende. Ihr Reflexionsvermögen gegen Luft ist

| C | D | E | F |
|--------|--------|--------|--------|
| 0,1615 | 0,1650 | 0,1697 | 0,1740 |

Gegen Öl wird das Reflexionsvermögen dieses Minerals reichlich klein. Es ist dann zweckmäßiger, das oben genannte total reflektierende Prisma zu benutzen. In der Regel ausreichend ist auch ein Anschliff von Bleiglanz. Sein Reflexionsvermögen für orangefarbiges Licht kann im Mittel angesetzt werden:

| | |
|---------------------|-------|
| gegen Luft: | 0,416 |
| gegen Zedernholzöl: | 0,271 |

Der Eichwinkel, am Gradkreis der Meßeinrichtung abgelesen, sei σ_0 .

Messung. — Vor der Messung des Reflexionsvermögens muß festgestellt werden, ob der Anschliff isotrop oder anisotrop ist. Hierzu stellt man die Schwingungsrichtung des Polarisators parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators, schaltet den Tubusanalysator ein, dagegen das Vergleichsprisma im Okular aus und kreuzt bei vorgeschlagener Hilfslupe, also unter konoskopischer Beobachtung, unter Zuhilfenahme eines isotropen Anschliffs die Nicols so gut wie möglich. Ist dann bei dem zu untersuchenden Mineral ein Anisotropieeffekt zwischen gekreuzten Nicols nicht wahrnehmbar, so kann die Messung des Reflexionsvermögens bei einem beliebigen Azimut des Anschliffs erfolgen. Nur muß vorher der Polarisator wieder in die 45° -Stellung gedreht und der Analysator ausgeschaltet werden. Erweist sich dagegen der Anschliff zwischen gekreuzten Nicols anisotrop, so muß zunächst die wahre Lage der Schwingungsrichtungen im Anschliff festgestellt werden (vgl. I, C. 8). Für die Messung des mittleren Reflexionsvermögens wird eine Schwingungsrichtung im An-

schliff parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators eingestellt und die Schwingungsrichtung des Polarisators wieder unter 45° zu dieser orientiert. Dieselbe Messung wird nach Drehung des Anschliffs um 90° wiederholt, und beide Ergebnisse werden gemittelt. Würde man den Polarisator parallel oder senkrecht zur Symmetrieebene des Opakilluminators einstellen und den Anschliff in Diagonalstellung hierzu orientieren, so würde man falsch messen.

Das mittlere Reflexionsvermögen ergibt sich aus

$$20) \quad \bar{R} = \left(\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma_0} \right)^2 R_0$$

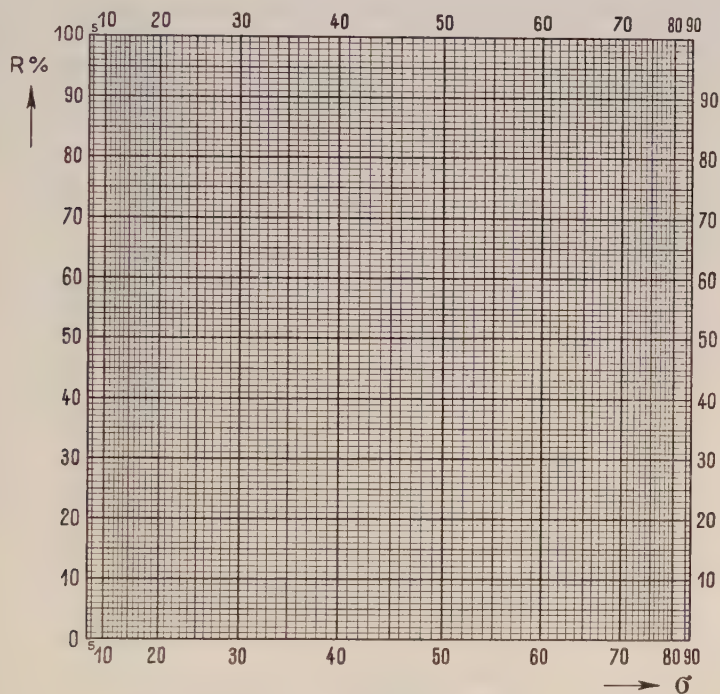


Abb. 24. Diagramm zur graphischen Auswertung des Reflexionsvermögens.

σ sind die Ablesungen am Meßkreis des Photometers; der Index σ_0 bezieht sich auf die Eichbasis. Bei anisotropen Anschliffen hat man so das mittlere Reflexionsvermögen gemessen.

Statt der Berechnung nach Formel 20) kann man auch eine graphische Auswertung mittels eines Diagramms gemäß Abb. 24 vornehmen. Man trägt in dieses das Reflexionsvermögen der Eichsubstanz bei dem ermittelten Einstellungswinkel σ_0 ein und zieht durch diesen Punkt und den Nullpunkt des Diagramms eine Gerade. Auf dieser findet man zu einem anderen Winkel σ das zugehörige Reflexionsvermögen.

Das Reflexionsvermögen geschliffener und polierter Flächen erscheint gegenüber dem am natürlichen Bruch- und Spaltflächen stets erniedrigt (vgl. II, E, 7, Tab. 5).

3. Sog. objektive Methode

Es liegt nahe, für die Messung des Reflexionsvermögens eine photoelektrische Zelle zu benutzen. Eine solche Meßmethode nennt man eine objektive. Es sind aber Einrichtungen, bei denen die Photozelle gegen das Okular ausgewechselt wird oder in die Bildebene des

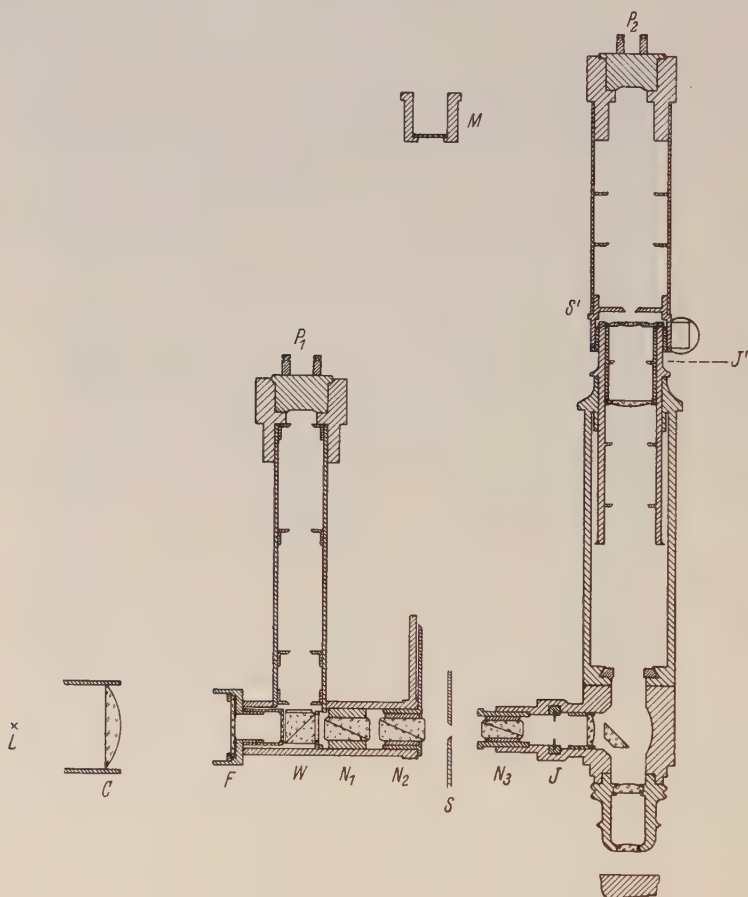


Abb. 25. Einrichtung für Reflexionsmessungen nach der Doppelphotozellenmethode (D. MALMQVIST, mit einigen Abwandlungen). L : Lichtquelle. C : Collimatorlinse. F : Lichtfilter. W : Strahlengangteilung. P_1, P_2 : Sperrschichtphotozellen. N_1, N_2, N_3 : Nicols (N_2 ein- und ausschaltbar und mit Meßkreis). S : Spaltblende. J : Irisblende im Opakilluminator. J' : Irisblende im Mikroskopokular, zu J konjugiert. S' : Spaltblende in der Austrittspupille des Mikroskops, zu S konjugiert. M : Mattscheibe, gegen P_2 austauschbar.

Okulars eingeschoben werden kann, für exakte Messungen nicht geeignet, da es auf diese Weise selbst unter Verwendung von zusätzlichen Blenden im Innern des Mikroskoptubus niemals möglich ist, fälschendes Streu- und Reflexlicht in genügendem Maße auszuschalten. Auch ist es erforderlich, von den Einflüssen, die aus Veränderungen der Lichtquelle resultieren, unabhängig zu werden. Eine Einrichtung, die zwar nicht sehr einfach ist, sich aber gut bewährt hat, ist in Abb. 25 dargestellt. Sie verwendet zwei Sperrschichtphotozellen nach einer Nullmethode. Erforderlich ist ein Galvanometer mit einer Empfindlichkeit von ca. 10^{-9} Amp. pro Skalenteil. Die elektrische Schaltung erhellt aus Abb. 26. Die Öffnung der Spaltblende S wird, wie bei der subjektiven Methode beschrieben wurde, bemessen. In der Austrittspupille des Mikroskops ist eine zweite Spaltblende S' angebracht, deren freie Öffnung höchstens ein wenig größer gewählt wird als das dort liegende Bild der Spaltblende S. Ihre Aufgabe ist, das im Innern des Mikroskops entstehende Streulicht von der Photozelle P₂ fern zu halten. Die Anschlüsse müssen auf ihrer Unterlage so gut ausgerichtet sein, daß bei Drehung des Anschliffs in seiner Ebene das Bild der Spaltblende S von S' immer vollständig durchgelassen wird. Das Nicol N₁ hat die Aufgabe, den Einfluß der durch W erzeugten teilweisen Polarisation des Lichts auszuschalten. Der Nicol N₂ dient als Meßvorrichtung, ist in den Strahlengang ein- und ausschaltbar und ist mit einem Meßkreis versehen. Der Nicol N₃ erzeugt das für die Messung des Reflexionsvermögens erforderliche Polarisationsazimut des einfallenden Lichts. Die Irisblende J' im Okular ist zur Irisblende J im Opakilluminator konjugiert. Die freie Öffnung von J' wird höchstens gleich dem Bilde der freien Öffnung von J gewählt.

Für die Messung des mittleren Reflexionsvermögens wird der Nicol N₃ so eingestellt, daß seine Schwingungsrichtung unter 45° zur Symmetrieebene des Opakilluminators liegt. In dieser Stellung von N₃ wird nach Ausschaltung von N₂ der Nicol N₁ genau zu N₃ gekreuzt und hierauf N₂ nach Wiedereinschaltung so eingestellt, daß seine Schwingungsrichtung parallel zu der von N₁ oder von N₃ liegt. Dieses Azimut wird als Nullage von N₂ abgelesen.

Wenn die Eichbasis ein niedrigeres Reflexionsvermögen hat als der interessierende Anschliff, dreht man den Nicol N₂ aus seiner Nullage

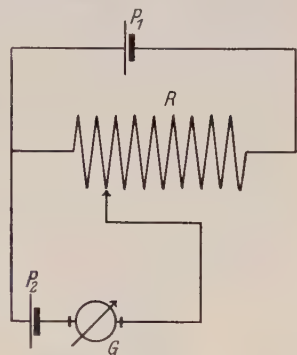


Abb. 26. Elektrische Schaltung für die Doppelphotozellenmethode (D. MALMQVIST). P₁, P₂: Sperrschichtphotozellen. G: Galvanometer. R: Potentiometer.

um den Winkel $\sigma_0 = 45^\circ$ und kompensiert bei eingeschalteter Eichbasis mittels des Potentiometers R, bis das Galvanometer auf Null einsteht. Ersetzt man die Eichbasis durch den interessierenden Anschliff, so wird der jetzt erfolgte Ausschlag des Galvanometers durch Drehung des Nicols N_2 kompensiert. Hat seine Schwingungsrichtung nach wiederhergestellter Kompensation das Azimut σ gegen die ursprünglich ermittelte Nullage (also nicht gegen σ_0), so berechnet sich das gesuchte Reflexionsvermögen aus

$$21) \quad \bar{R} = \left(\frac{\sin 2\sigma_0}{\sin 2\sigma} \right)^2 R_0$$

wo R_0 das Reflexionsvermögen der Eichbasis ist. Wenn der zu messende Anschliff anisotrop ist, muß eine seiner Schwingungsrichtungen parallel zur Symmetrieebene des Opakilluminators gelegt werden und die Messung nach Drehung des Anschliffs um 90° wiederholt werden. Zur Berechnung des mittleren Reflexionsvermögens gemäß Formel 21) benutzt man dann für σ den Mittelwert beider Messungen.

Wenn die Eichbasis ein höheres Reflexionsvermögen hat als der interessierende Anschliff, wählt man für den Winkel σ_0 einen kleineren Wert als 45° . Die Formel 21) behält auch hierfür Gültigkeit.

Kompliziert wird der erforderliche Meßvorgang, wenn man auch die uniradialen Reflexionsvermögen und die Doppelreflexion direkt messen will. Man erhält auch hier die genannten Größen einfacher und wesentlich genauer, wenn man nach dem in I, C, 9 geschilderten Verfahren den Anisotropieparameter $R_2:R_1$ bestimmt und dann die Formeln 18) anwendet.

Wesentlich für die Zuverlässigkeit solcher photoelektrischen Messungen ist, daß für beide Photozellen die Photospannungen sich in gleichem Verhältnis mit der Lichtintensität ändern. Ob das zutrifft, muß man bei einer Nullstellung des Galvanometers durch Veränderung der Lichtquellenintensität prüfen.

E. Messung der Absorptionskoeffizienten im durchfallenden Licht

Wenn die Absorptionskoeffizienten hinreichend klein sind, können sie im durchfallenden Licht dadurch gemessen werden, daß man die Lichtdurchlässigkeit einer Platte von bekannter Dicke bestimmt. Unter Berücksichtigung der Reflexionsverluste ergibt sich der Absorptionskoeffizient k aus der Lichtdurchlässigkeit D , der Plattendicke d und dem Reflexionsvermögen R der Platte zu

$$22) \quad k = \frac{2 \log (1 - R) - \log D}{4\pi d \log e} - \lambda_0$$

Hierin sind für \log die dekadischen Logarithmen zu nehmen; die Lichtwellenlänge λ_0 sowie die Plattendicke d müssen in derselben Längeneinheit ausgedrückt werden. Die Lichtdurchlässigkeit D , das

Verhältnis der Intensität des durchgelassenen zu der des einfallenden Lichts, ist immer kleiner als 1, daher $-\log D$ immer positiv. Ist der Brechungsindex n des Kristalls einigermaßen bekannt, so braucht man R nicht zu messen, sondern kann wegen der Kleinheit der Absorptionskoeffizienten die Beziehung

$$23) \quad 1 - R = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

zur Berechnung verwenden.

Für die Messung der Durchlässigkeit kann man das oben beschriebene Mikrophotometer in der in Abb. 27 dargestellten Abwand-

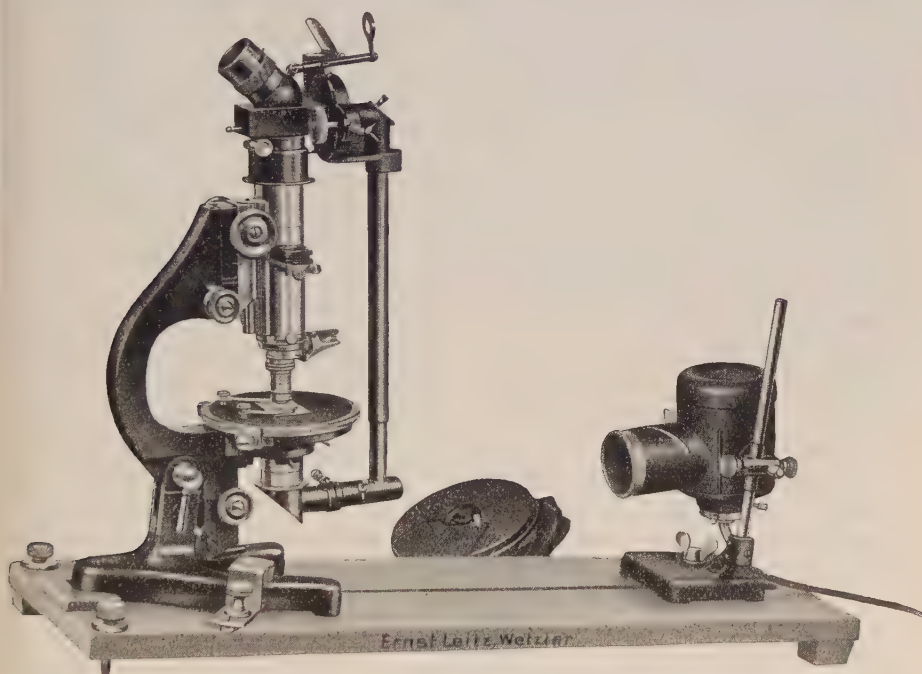


Abb. 27. Mikrophotometer zur Messung der Lichtdurchlässigkeit.

lung benutzen. Der Analysator des Mikroskops bleibt bei der Messung ausgeschaltet, der Polarisator bleibt eingeschaltet. Man legt auf den Objektisch eine klare Glasscheibe und stellt die Meßvorrichtung des Photometers auf gleiche Feldhelligkeiten ein. Die Ablesung am Meßkreis sei σ_0 . Sie soll etwa zwischen 30° und 50° liegen. Dies läßt sich eventuell unter Einschalten von geeigneten Grauscheiben zwischen Polarisator und Objektisch immer erreichen. Man legt dann die zu messende Kristallplatte auf die Glasscheibe und bringt sie zwischen gekreuzten Nicols im Mikroskop in eine Auslöschungsstellung. Nach Wiederausschaltung des Analysators wird photometriert. Ist die zu-

gehörige Ablesung am Meßkreis σ , so ist die Lichtdurchlässigkeit für die Welle, deren Schwingungsrichtung parallel zu der des Polarisators lag:

$$24) \quad D = \left(\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma_0} \right)^2$$

Nach Drehung des Objektisches um 90° findet man entsprechend die Durchlässigkeit für die andere Welle.

Soll D im eingelegten Dünnschliff gemessen werden, so hat man nach Bestimmung von σ_0 die klare Glasplatte durch den Dünnschliff zu ersetzen. In der Bestimmungsgleichung für $1-R$ ist dann als Näherungswert für n der relative Brechungsindex zwischen Mineral und Glas einzusetzen.

Man kann auch hier die Auswertung mit Hilfe des Diagramms in Abb. 24 vornehmen. Eichgerade ist dann diejenige Gerade, welche den Nullpunkt des Diagramms mit dem Punkte verbindet, dessen Abszisse gleich dem Betrage des Winkels σ_0 und dessen Ordinate den Wert 1,00 (bzw. 100 %) hat.

Entsprechend kann man auch die in I, D, 3 geschilderte objektive Methode für Messungen im durchfallenden Licht abwandeln. Der Nicol N_3 muß in diesem Falle vor dem Mikroskopspiegel stehen und seine Schwingungsrichtung vertikal ausgerichtet sein. Bei eingeschalteter Platte dreht man den Nicol N_2 um den Winkel $\sigma = 45^\circ$ aus der Nullage und kompensiert das Galvanometer, das in diesem Falle erheblich weniger empfindlich zu sein braucht, mittels des Potentiometers R . Nach Fortnahme der Kristallplatte kompensiert man den neuen Galvanometerausschlag durch Drehung des Nicols N_2 . Ist dann σ_0 das Azimut des Nicols N_2 gegen seine ursprüngliche Nullage (also nicht gegen σ), so ist die Lichtdurchlässigkeit der interessierenden Platte für die Welle, deren Schwingungsrichtung parallel zu der des Nicols N_3 lag, gegeben durch

$$25) \quad D = \left(\frac{\sin 2\sigma_0}{\sin 2\sigma} \right)^2$$

II. Theoretischer Teil¹⁾

A. Komplexe Größen

Zahlen in der Form $a + bi$ sind zuerst bei der numerischen Auflösung von Gleichungen aufgetreten. Man hat solche Wurzeln der Gleichungen komplexe genannt, $i^2 = -1$ als imaginäre Einheit bezeichnet und damit komplexe Zahlen ganz allgemein in der Form $a + bi$ geschrieben. Jede komplexe Zahl ist also durch ein Zahlenpaar gekennzeichnet. Die Herkunft dieser Zahlenpaare hat es nahe

¹⁾ Die Formeln in diesem Teil sind unabhängig von denen in Abschnitt I numeriert.

gelegt, mit ihnen wie mit gewöhnlichen Zahlen zu rechnen. Die dabei auftretenden höheren Potenzen von i lassen sich, ebenfalls nach den gewöhnlichen Rechenregeln, reduzieren: $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$; $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ usw. Erst zaghaft, dann durch die Erfolge ermutigt, hat die Verwendung solcher Zahlenpaare in der algebraischen Form einer komplexen Zahl auch in die theoretische Physik Eingang gefunden.

Die beiden komplexen Zahlen $a + bi$ und $a - bi$ nennt man zueinander konjugiert. Ihr Produkt ist immer reell und eine positive Zahl, wie die Ausrechnung liefert: $(a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$. Man bezeichnet dieses Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen als die „Norm“ der komplexen Zahl und schreibt:

$$1) \quad \text{Norm}(a \pm bi) = a^2 + b^2$$

Die Quadratwurzel aus der Norm nennt man den absoluten Betrag der komplexen Zahl:

$$2) \quad \text{abs}(a \pm bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Norm von Produkten ist gleich dem Produkte der Normen der einzelnen Faktoren, wie man sich leicht durch Ausrechnung überzeugt:

$$\text{Norm} \frac{a(b + ci)(d + ei)}{f + gi} = \frac{a^2 \text{Norm}(b + ci) \text{Norm}(d + ei)}{\text{Norm}(f + gi)}$$

Bei der mathematischen Darstellung physikalischer Vorgänge erweist sich oft die Verwendung der Exponentialfunktion mit imaginärem Koeffizienten als nützlich. Diese Funktion $e^{i\phi}$ ist eine periodische und zugleich eine komplexe Zahl. Dies ergibt sich, wenn man die bekannte Reihenentwicklung der Exponentialfunktion mit $x = i\phi$ als Argument hinschreibt und das Ergebnis dieser Entwicklung mit der Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen $\cos \phi$ und $\sin \phi$ vergleicht. Man erkennt dann das Bestehen folgender nach L. EULER genannten Relation:

$$3) \quad e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Einer harmonischen linear polarisierten Schwingung kann man sowohl eine \cos - wie eine \sin -Funktion zuordnen. Es entspricht einer allgemeineren Darstellung, wenn man einer solchen Schwingung das Funktionspaar $\cos \phi$ und $\sin \phi$, d. h. die komplexe periodische Größe $\cos \phi + i \sin \phi$ zuordnet. Daher ist ¹⁾

$$4) \quad u = A e^{i\phi}$$

eine allgemeine Darstellung einer solchen harmonischen linear polarisierten Schwingung in komplexer Form. A ist die Amplitude, ϕ die Phase der Schwingung. Da wir die Intensität einer Schwingung dem Quadrate ihrer Amplitude gleichsetzen, müssen wir, um zu $J = A^2$ zu gelangen, in 4) die komplexe Größe u mit ihrer konjugiert komplexen

¹⁾ Wir kennzeichnen im Folgenden komplexe Größen immer durch gotische Buchstaben, reelle durch lateinische oder griechische.

multiplizieren; letztere erhält man, wenn man in der komplexen Zahl $+i$ durch $-i$ ersetzt:

$$5) \quad J = u_{+i} \cdot u_{-i} = A^2 e^{+i\Phi} e^{-i\Phi} = A^2 e^0 = A^2$$

Die Intensität einer Schwingung ist also gleich ihrer Norm.

Eine elliptisch polarisierte Schwingung kommt zustande, wenn sich zwei rechtwinklig zueinander liegende und linear polarisierte Schwingungen u und v , zwischen denen eine Phasendifferenz besteht, zu einer Schwingung zusammensetzen. Jede der Einzelschwingungen können wir nach obigem in komplexer Form darstellen:

$$6) \quad u = A e^{i\Phi_1}; \quad v = B e^{i\Phi_2}$$

Bilden wir

$$7) \quad \frac{v}{u} = \frac{B}{A} e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} = \frac{B}{A} e^{i\Delta}$$

so ist Δ die relative Phasendifferenz beider Schwingungen. Würde diese Null sein, so würden sich die beiden Schwingungen zu einer linear polarisierten zusammensetzen, deren Azimut χ gegen die Richtung der Amplitude A durch

$$8) \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{B}{A} = \left(\frac{v}{u} \right)_{\Delta=0}$$

bestimmt ist. $\operatorname{tg} \chi$ wäre also in diesem Falle das Amplitudenverhältnis der beiden Schwingungen. Wir übertragen nun diese Bezeichnungsweise auch auf den Fall, wenn Δ von Null verschieden ist, und setzen allgemein $\frac{v}{u}$ gleich der Tangente eines Winkels, allerdings nun eines komplexen Winkels:

$$9) \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} w = \frac{B}{A} e^{i\Delta}$$

Wir bezeichnen dann entsprechend $\operatorname{tg} w$ als das komplexe Amplitudenverhältnis und w als das komplexe Azimut der resultierenden Schwingung gegen die Richtung der Amplitude A . Eine elliptische Schwingung hat also ein komplexes Amplitudenverhältnis und ein komplexes Azimut. Sie kann immer entstanden gedacht werden als Resultierende zweier senkrecht zueinander liegenden linearen Schwingungen mit relativer Phasendifferenz. Aus dieser Zerlegung der elliptischen Schwingung ergibt sich zwangsläufig die Berechnung ihrer Intensität: Da die Gesamtintensität zweier senkrecht zueinander liegenden linear polarisierten Schwingungen immer gleich der Summe der Intensitäten der einzelnen Schwingungen ist, so folgt für die Intensität der resultierenden elliptischen Schwingung:

$$10) \quad J = u_{+i} u_{-i} + v_{+i} v_{-i} = \operatorname{Norm}(u) + \operatorname{Norm}(v) = A^2 + B^2$$

Dieses einfache Gesetz der Intensitätsberechnung darf aber, wie besonders hervorgehoben werden möge, nur auf linear polarisierte Kom-

ponenten, d. h. auf solche Komponenten angewandt werden, die nach reellen Azimuten polarisiert sind. Wir werden später auf Komponenten stoßen, die nach komplexen Azimuten polarisiert sind. Für solche gilt dann das Intensitätsgesetz 10) nicht. Vielmehr müssen solche nach komplexen Azimuten polarisierten Komponenten für die Berechnung der Intensität ihrer Resultierenden zunächst auf Komponenten, die nach reellen Azimuten polarisiert sind, zurückgeführt werden, bevor man die einfache Intensitätsberechnung mit Hilfe der Normen bzw. der Amplituden entsprechend Formel 10) anwenden kann.

Die Vorteile der komplexen Betrachtungsweise in der Physik liegen hauptsächlich in folgendem: Für viele Vorgänge in der Natur sind die Einzelheiten nur unter besonders einfachen Bedingungen bekannt. Auch im allgemeineren Falle kann man dann unter Umständen die Erscheinungen durch dasselbe mathematische Gleichungssystem analysieren, wenn man die für den Vorgang maßgeblichen Größen in komplexer Form schreibt. Wann dies statthaft ist, muß im Einzelfalle durch eine besondere Untersuchung entschieden werden. Die Zulässigkeit einer solchen Übertragung liegt vor, wenn man die Gesetze der optischen Erscheinungen in absorbierenden Kristallen aus denen in vollkommen durchsichtigen herleiten will. Wäre dem nicht so, so stieße die Theorie der Optik absorbierender Kristalle auf sehr große Schwierigkeiten.

B. Das Übertragungsprinzip

Da der Lichtvektor als eine periodisch veränderliche Größe aufgefaßt werden muß, kann zu seiner Darstellung in vollkommen durchsichtigen Medien nach den Ausführungen des vorstehenden Abschnittes der Ansatz 4) benutzt werden. In absorbierenden Medien erfährt die Amplitude längs des Lichtweges eine Schwächung, die man, ohne irgendwelche Voraussetzungen machen zu müssen, für einen Weg gleich dem 2π ten Teil der Lichtwellenlänge λ in dem betreffenden Medium durch

$$11) \quad A = A_0 e^{-z}$$

kennzeichnen kann. A_0 ist die ursprüngliche Amplitude, A die nach Zurücklegung eines Weges $\frac{\lambda}{2\pi}$ im Medium. Aus Absorptionsmessungen an verschieden dicken Schichten desselben Mediums folgt nun als Erfahrungstatsache, daß die Amplitude in solchen Medien bei arithmetisch zunehmender Weglänge in geometrischer Progression geschwächt wird. Man erhält also die Amplitude, nachdem das Licht eine Wegstrecke d in dem betreffenden Medium zurückgelegt hat, indem man den Exponenten von e in 11) mit $d: \frac{\lambda}{2\pi}$ multipliziert. Das ergibt:

$$A = A_0 e^{-2\pi \kappa \frac{d}{\lambda}}$$

Ersetzt man hierin die Wellenlänge λ in dem Medium vermittels der Beziehung $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ durch die Wellenlänge λ_0 im Vakuum, wobei n der Brechungsindex des betreffenden Mediums ist, und schreibt $n\kappa = k$, so erhält man

$$12) \quad A = A_0 e^{-2\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Die Darstellung des Lichtvektors wird also nach 4) und 12):

$$13) \quad u = A_0 e^{i\Phi - 2\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

und die Intensität nach 5):

$$14) \quad J = A_0^2 e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

k , zuerst von A. CAUCHY so bezeichnet, heißt der Absorptionskoeffizient des Mediums; $\kappa = \frac{k}{n}$ nennt man den Absorptionsindex,

$\frac{4\pi k}{\lambda_0}$ den Extinktionsmodul und $\frac{4\pi k}{\lambda_0} \log e$ den dekadischen Extinktionsmodul oder auch BUNSENSCHEN Extinktionskoeffizient. Letzterer wird hauptsächlich in der Photometrie und Kolorimetrie angewandt. Für die Zwecke der Kristalloptik ist es am vorteilhaftesten, nur mit den Absorptionskoeffizienten k zu operieren, weil sich damit die mathematischen Beziehungen am einfachsten darstellen lassen. Man verwechsle aber alle diese Begriffe nicht, wie leider häufig in der Literatur geschehen, was dann die Orientierung erschwert.

Zu dem am Schlusse des Abschnittes II, A angedeuteten Übertragungsprinzip werden wir hingeleitet, wenn wir in 13) die Phasen explizit als Funktion der Zeit und des Ortes hinschreiben. Wir setzen also

$$15) \quad \Phi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nd}{\lambda_0} \right)$$

wo t die Zeit, T die Schwingungsdauer und d die Ortskoordinate bedeuten, letztere gezählt längs des Lichtweges von derjenigen Stelle aus, an welcher die Amplitude noch ihren vollen Wert A_0 hat. Der Ansatz 15) drückt aus, daß sich Φ zeitlich mit T und örtlich mit $\frac{\lambda_0}{n}$ periodisch verändert. Die explizite Darstellung von 13) wird damit:

$$u = A_0 e^{i2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nd}{\lambda_0} \right) - 2\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Wir benutzen nun den Kunstgriff, daß wir den zweiten Summanden des Exponenten mit $1 = -i^2$ multiplizieren und dann den gemeinsamen Faktor $i2\pi$ beider Summanden herausziehen:

$$16) \quad u = A_0 e^{i 2 \pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda_0} (n - i k) \right\}} = A_0 e^{i \mathfrak{B}}$$

An Stelle der reellen Phase Φ bei der Lichtfortpflanzung in vollkommen durchsichtigen Medien tritt also für absorbierende Medien eine komplexe Phase \mathfrak{B} auf, die sich von der reellen Phase Φ in 15) nur dadurch unterscheidet, daß sie an Stelle des reellen Brechungsindex n die komplexe Zahl $n - i k$ enthält. Wir nennen aus diesem Grunde

$$17) \quad n = n - i k$$

den komplexen Brechungsindex. Er ist also das Zahlenpaar n, k in der durch 17) gegebenen Verbindung. Die Darstellung des Lichtvektors in absorbierenden Medien ergibt sich also aus der für durchsichtige Medien, wenn man an Stelle des Brechungsindex den komplexen Brechungsindex einführt. Alle anderen Größen in 16) haben mit den speziellen Eigenschaften des Mediums nichts zu tun.

Das gleiche Übertragungsprinzip folgt auch aus den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes. Die Absorption des Lichts kann im wesentlichen durch zwei Ursachen erklärt werden: durch elektrische Leitfähigkeit oder durch die Einwirkung von Resonanzstellen im Spektrum. In beiden Fällen führt das entsprechend verallgemeinerte System der Grundgleichungen zu Beziehungen, die mit den für durchsichtige Medien geltenden formal übereinstimmen und nur statt einer reellen Materialkonstante eine komplexe enthalten. Es bleiben daher auch alle Folgerungen aus diesem System der Grundgleichungen formal, d. h. in mathematischer Sprache ausgedrückt, dieselben. Man hat nur in den Gleichungen die auf das absorbierende Medium bezüglichen Größen durch komplexe zu ersetzen.

C. Fortpflanzung und Polarisation des Lichts in beliebig stark absorbierenden Kristallen

1. Die komplexe Indikatrix

Daß man die Gesetze der Lichtfortpflanzung und Polarisation in vollkommen durchsichtigen Kristallen aus den geometrischen Eigenschaften von Referenzflächen ableiten kann, ist eine für die Anschaulichkeit wertvolle Folgerung aus dem System der Grundgleichungen. Als solche Referenzfläche wird in der angewandten Kristalloptik am häufigsten das Indexellipsoid, auch Indikatrix genannt, benutzt. Seine auf die Hauptachsen bezogene Gleichung lautet:

$$18) \quad \frac{x^2}{n_\alpha^2} + \frac{y^2}{n_\beta^2} + \frac{z^2}{n_\gamma^2} = 1$$

Die Radienvektoren dieser Referenzfläche sind Brechungsindizes; $n_\alpha < n_\beta < n_\gamma$ sind die drei Hauptbrechungsindizes des Kristalls. Wenn wir auf diese Referenzfläche das in Abschnitt II, B begründete Über-

tragungsprinzip anwenden wollen, müssen wir beachten, daß nicht nur die Hauptbrechungsindizes, sondern auch die Hauptachsenrichtungen der Referenzfläche eine dem Kristall eigentümliche Angelegenheit sind. Für absorbierende Kristalle ist also die Indikatrix unter Benutzung komplexer Symbole in folgender Form zu schreiben:

$$19) \quad \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

Um aus der Gleichung dieser Fläche Folgerungen ziehen zu können, muß sie auf ein Koordinatensystem mit reellen Achsenrichtungen bezogen werden. Zu diesem Zweck führen wir an Stelle des komplexen Hauptachsensystems x, y, z zunächst zwei reelle Koordinatensysteme x', y', z' und x'', y'', z'' mit reellen Hauptachsenrichtungen ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{n_x^2} &= p_{x'}^2 x'^2 + i q_{x''}^2 x''^2 \\ 20) \quad \frac{y^2}{n_y^2} &= p_{y'}^2 y'^2 + i q_{y''}^2 y''^2 \\ \frac{z^2}{n_z^2} &= p_{z'}^2 z'^2 + i q_{z''}^2 z''^2 \end{aligned}$$

Damit in diesem Ansatz sowohl die Achsensysteme wie auch die Größen p^2 und q^2 eine eindeutige Bedeutung erhalten, muß man die Beziehung 20) noch durch ein zweites Tripel von Bedingungen ergänzen. Als solches wählen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_x^2} &= p_{x'}^2 + i q_{x''}^2 \\ 21) \quad \frac{1}{n_y^2} &= p_{y'}^2 + i q_{y''}^2 \\ \frac{1}{n_z^2} &= p_{z'}^2 + i q_{z''}^2 \end{aligned}$$

Nach 17) ist allgemein:

$$22) \quad \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n - ik}\right)^2 = \left(\frac{n + ik}{n^2 + k^2}\right)^2 = \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2} + i \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2}$$

Der Vergleich mit 21) ergibt:

$$23) \quad p_{x'}^2 = \left\{ \frac{n^2 - k^2}{(n^2 + k^2)^2} \right\}_x; \quad q_{x''}^2 = \left\{ \frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \right\}_x$$

und entsprechend für die anderen Indizes. Hierdurch sind die Koeffizienten p^2 und q^2 vollständig bestimmt und damit nach 20) auch die beiden Koordinatentripel x', y', z' und x'', y'', z'' . Mittels der Beziehung 20) nimmt die Gleichung der Indikatrix die Form an:

$$24) \quad p_x^2 x'^2 + p_y^2 y'^2 + p_z^2 z'^2 + i(q_{x''}^2 x''^2 + q_{y''}^2 y''^2 + q_{z''}^2 z''^2) = 1$$

Man nennt das Achsensystem x', y', z' das Polarisationshauptachsensystem und das Achsensystem x'', y'', z'' das Absorptionshauptachsensystem des Kristalls: doch verleiten diese Bezeichnungen leicht zu falschen Vorstellungen und sind entbehrlich.

Wir überführen nun die beiden Systeme x', y', z' und x'', y'', z'' durch je eine Drehung in ein gemeinsames, aber beliebig orientiertes reelles System x, y, z . Dieses neue Bezugssystem ist dann im allgemeinen weder für den reellen Bestandteil von 24), noch für den imaginären Bestandteil ein Hauptachsensystem. Wir erhalten die auf ein solches System x, y, z bezogene Gleichung der Indikatrix durch folgende reelle Koordinatentransformation:

$$25) \quad \begin{aligned} x' &= \alpha_1' x + \alpha_2' y + \alpha_3' z & x'' &= \alpha_1'' x + \alpha_2'' y + \alpha_3'' z \\ y' &= \beta_1' x + \beta_2' y + \beta_3' z & y'' &= \beta_1'' x + \beta_2'' y + \beta_3'' z \\ z' &= \gamma_1' x + \gamma_2' y + \gamma_3' z & z'' &= \gamma_1'' x + \gamma_2'' y + \gamma_3'' z \end{aligned}$$

Hierin bedeuten die Koeffizienten α, β, γ die Kosinus der Winkel zwischen den Richtungen der Achsen im System x', y', z' bzw. x'', y'', z'' und den Richtungen der Achsen im System x, y, z nach folgendem Schema:

$$26) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} & x' & y' & z' & x'' & y'' & z'' \\ \hline x & \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & \alpha_1'' & \beta_1'' & \gamma_1'' \\ y & \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & \alpha_2'' & \beta_2'' & \gamma_2'' \\ z & \alpha_3' & \beta_3' & \gamma_3' & \alpha_3'' & \beta_3'' & \gamma_3'' \end{array}$$

Durch Einsetzen von 25) in 24) erhält man dann die Gleichung der Indikatrix in der Form:

$$27) \quad (p_{11}^2 + i q_{11}^2) x^2 + (p_{22}^2 + i q_{22}^2) y^2 + (p_{33}^2 + i q_{33}^2) z^2 + 2(p_{12}^2 + i q_{12}^2) xy + 2(p_{23}^2 + i q_{23}^2) yz + 2(p_{31}^2 + i q_{31}^2) zx = 1$$

wo die Koeffizienten p_{hk}^2, q_{hk}^2 folgende Abkürzungen bedeuten:

$$28) \quad \begin{aligned} p_{hk}^2 &= \alpha_h' \alpha_k' p_{x'}^2 + \beta_h' \beta_k' p_{y'}^2 + \gamma_h' \gamma_k' p_{z'}^2 \\ q_{hk}^2 &= \alpha_h'' \alpha_k'' q_{x''}^2 + \beta_h'' \beta_k'' q_{y''}^2 + \gamma_h'' \gamma_k'' q_{z''}^2 \end{aligned}$$

Da hiernach p_{hk}^2 und q_{hk}^2 Größen gleicher Art sind wie p_x^2 bzw. $q_{x''}^2$, können wir entsprechend 21) schreiben:

$$29) \quad \frac{1}{n_{hk}^2} = p_{hk}^2 + i q_{hk}^2$$

Damit nimmt die Gleichung 27) der Indikatrix die Form an:

$$30) \quad \frac{x^2}{n_{11}^2} + \frac{y^2}{n_{22}^2} + \frac{z^2}{n_{33}^2} + \frac{2xy}{n_{12}^2} + \frac{2yz}{n_{23}^2} + \frac{2zx}{n_{31}^2} = 1$$

Es ist dies die Gleichung einer auf ihren Mittelpunkt bezogenen allgemeinen Fläche zweiter Ordnung, deren Radienvektoren komplexe

Brechungsindizes bedeuten. Ihre sechs Hauptwerte n_{hk} bezeichnen wir als „Indikatrixkonstanten“. Sie sind nach 29), 28) und 23) abhängig von den drei Hauptbrechungsindizes n_x, n_y, n_z und von der Lage des Koordinatensystems x, y, z . Dieses kann beliebig angenommen werden, da die Transformationsgleichungen 25) für beliebige Kombinationen der Richtungskosinus α, β, γ gelten, sofern nur zwischen diesen die aus der Geometrie folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} 31) \quad & \alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 = 1 \text{ usw.} \\ & \alpha_1' \beta_1' + \alpha_2' \beta_2' + \alpha_3' \beta_3' = 0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

2. Die zu einer beliebigen Fortpflanzungsrichtung im Kristall gehörigen Brechungsindizes, Absorptionskoeffizienten, Schwingungsrichtungen und Schwingungszustände

Das beliebige Koordinatensystem x, y, z der komplexen Indikatrix in 30) können wir so legen, daß seine z -Achse mit der Fortpflanzung des Lichts zusammenfällt. Die Gleichung der Schnittkurve der Indikatrix mit der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene erhalten wir dann, wenn wir in 30) $z = 0$ setzen. Das ergibt:

$$32) \quad \frac{x^2}{n_{11}^2} + \frac{y^2}{n_{22}^2} + \frac{2xy}{n_{12}^2} = 1$$

Um die komplexen Indizes n und die Schwingungsrichtungen für die Wellen mit der Fortpflanzungsrichtung z zu finden, haben wir nun genau entsprechend dem Vorgang bei durchsichtigen Kristallen in 32) die Extremalwerte der Radienvektoren n in der Schnittfläche und die Richtungen dieser Extremalwerte in der Schnittfläche aufzusuchen. Die Lösung der Aufgabe wird einfach, wenn wir folgendes beachten: Die Richtungen der Radienvektoren, in denen Extremalwerte von n auftreten, sind die Hauptachsen der Schnittkurve. Natürlich sind ihre Richtungen im vorliegenden Falle komplex. Bezeichnen wir sie mit \mathfrak{x} und \mathfrak{y} und die zugehörigen Halblängen der Hauptachsen mit n_1 und n_2 , so muß die Gleichung der Schnittkurve, auf \mathfrak{x} und \mathfrak{y} als Achsen bezogen, lauten:

$$33) \quad \frac{\mathfrak{x}^2}{n_1^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{n_2^2} = 1$$

Wenn wir also die Gleichung 32) einer komplexen Koordinatentransformation unterwerfen und dann in der so erhaltenen Gleichung die Koeffizienten von \mathfrak{x}^2 und \mathfrak{y}^2 mit denen in 33) vergleichen, müssen wir unmittelbar die gesuchten Beziehungen für n_1, n_2 und die diesen Extremalwerten zugeordneten Schwingungsrichtungen erhalten. Die

in Frage stehende Koordinatentransformation ist eine komplexe Drehung innerhalb einer Ebene. Also lauten die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} 34) \quad x &= r \cos w - y \sin w \\ y &= r \sin w + y \cos w \end{aligned}$$

Hierbei ist w der Winkel zwischen den Richtungen r und x , d. h. das komplexe Azimut der komplexen Richtung r gegen die reelle Richtung x in der Schnittfläche. Setzt man die Beziehungen 34) in 32) ein und ordnet die Glieder nach den komplexen Koordinaten r , y , so erhält man:

$$\begin{aligned} 35) \quad r^2 \left\{ \frac{\cos^2 w}{n_{11}^2} + \frac{\sin^2 w}{n_{22}^2} + \frac{\sin 2w}{n_{12}^2} \right\} + y^2 \left\{ \frac{\sin^2 w}{n_{11}^2} + \frac{\cos^2 w}{n_{22}^2} - \frac{\sin 2w}{n_{12}^2} \right\} \\ - r y \left\{ \left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right) \sin 2w - \frac{2 \cos 2w}{n_{12}^2} \right\} = 1 \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten mit denen in 33) liefert die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 36) \quad \frac{1}{n_1^2} &= \frac{\cos^2 w}{n_{11}^2} + \frac{\sin^2 w}{n_{22}^2} + \frac{\sin 2w}{n_{12}^2} \\ \frac{1}{n_2^2} &= \frac{\sin^2 w}{n_{11}^2} + \frac{\cos^2 w}{n_{22}^2} - \frac{\sin 2w}{n_{12}^2} \\ 0 &= \left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right) \sin 2w - \frac{2 \cos 2w}{n_{12}^2} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} 37) \quad \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} &= \frac{1}{n_{11}^2} + \frac{1}{n_{22}^2} \\ \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} &= \left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right) \cos 2w + \frac{2 \sin 2w}{n_{12}^2} \\ \operatorname{tg} 2w &= \frac{2 \frac{1}{n_{12}^2}}{\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2}} = \frac{2 n_{22}^2 n_{11}^2}{n_{12}^2 (n_{22}^2 - n_{11}^2)} \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung lassen sich nun die Funktionen des Winkels $2w$ mittels der dritten Gleichung eliminieren. Man erhält dadurch die zweite Gleichung in der Form

$$38) \quad \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right)^2 + \left(\frac{2}{n_{12}^2} \right)^2}$$

Damit ergeben sich explizit in den Indikatrixkonstanten als Lösungen von 36):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_1^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{11}^2} + \frac{1}{n_{22}^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right)^2 + \left(\frac{2}{n_{12}^2} \right)^2} \\
 \frac{1}{n_2^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{11}^2} + \frac{1}{n_{22}^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right)^2 + \left(\frac{2}{n_{12}^2} \right)^2} \\
 \text{tg } 2w &= \frac{2 \frac{1}{n_{12}^2}}{\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2}}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten. — Sind die komplexen Hauptbrechungsindizes n_x, n_y, n_z des Kristalls gegeben, so findet man die Größen p_x^2, p_y^2, p_z^2 und q_x^2, q_y^2, q_z^2 , welche die Quadrate der reziproken Halbachsen der komplexen Fläche 24) darstellen, aus 23). Hiermit erhält man aus 28) und 29) die reziproken Quadrate der drei Indikatrixkonstanten n_{11}, n_{22}, n_{12} . Die damit aus den beiden ersten Gleichungen in 39) sich ergebenden Ausdrücke für $\frac{1}{n_1^2}$ und $\frac{1}{n_2^2}$ bringt man durch Sonderung der reellen und imaginären Bestandteile auf die Form

$$\frac{1}{n^2} = p^2 + i q^2
 \tag{40}$$

Zur expliziten weiteren Berechnung der Brechungsindizes n und der Absorptionskoeffizienten k läßt sich dann folgendes Verfahren benutzen: Man setzt

$$\frac{1}{n^2} = \varrho^2 e^{i\Phi} = \varrho^2 \cos \Phi + i \varrho^2 \sin \Phi
 \tag{41}$$

Der Vergleich von 41) mit 40) liefert

$$p^2 = \varrho^2 \cos \Phi; \quad q^2 = \varrho^2 \sin \Phi
 \tag{42}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{q^2}{p^2} = \text{tg } \Phi; \quad p^4 + q^4 = \varrho^4
 \tag{43}$$

Aus 41) und 43) erhält man sukzessive:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} &= \varrho e^{i\frac{1}{2}\Phi} = \varrho \cos \frac{1}{2}\Phi + i \varrho \sin \frac{1}{2}\Phi \\
 &= \sqrt[4]{p^4 + q^4} \cos \frac{1}{2}\Phi + i \sqrt[4]{p^4 + q^4} \sin \frac{1}{2}\Phi
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Andererseits ist nach 17):

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n - ik} = \frac{n + ik}{n^2 + k^2}
 \tag{45}$$

Durch Gleichsetzen der reellen bzw. imaginären Teile in 44) und 45) erhält man

$$46) \quad \frac{n}{n^2 + k^2} = \sqrt[4]{p^4 + q^4} \cos \frac{1}{2} \Phi; \quad \frac{k}{n^2 + k^2} = \sqrt[4]{p^4 + q^4} \sin \frac{1}{2} \Phi$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach n und k auf, so folgen für die Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten die Bestimmungsgleichungen

$$47) \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{q^2}{p^2}; \quad n = \frac{\cos \frac{1}{2} \Phi}{\sqrt[4]{p^4 + q^4}}; \quad k = \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\sqrt[4]{p^4 + q^4}}$$

wobei Φ im zweiten Quadranten zu wählen ist, wenn $\operatorname{tg} \Phi$ sich negativ ergibt. Wenn man also $\frac{1}{n_1^2}$ nach 39) berechnet und auf die Form

40) gebracht hat, liefert die erste Gleichung in 47) Φ_1 und die beiden weiteren Gleichungen in 47) ergeben n_1 und k_1 . Entsprechend findet man n_2 und k_2 .

Es mag darauf aufmerksam gemacht werden, daß man diese Brechungsindizes nicht dazu benutzen darf, um nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz die Richtungsänderungen des Lichts beim Übergang von einem durchsichtigen nach einem absorbierenden Medium oder umgekehrt zu berechnen. Es handelt sich bei den ermittelten Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten stets um solche für „homogene“ Wellen, bei denen die Flächen gleicher Amplitude mit denen gleicher Phase zusammenfallen. Diese Voraussetzung ist bei absorbierenden Kristallen nur dann erfüllt, wenn das Licht senkrecht auf eine beliebige Grenzfläche des Kristalls auffällt.

Schwingungsrichtungen und Schwingungszustände. — Diese werden durch die letzte Gleichung in 39) bestimmt. Da die Konstanten n_{hk} komplex sind, ist auch w im allgemeinen ein komplexer Winkel. Ein komplexes Azimut der Schwingungsrichtung bedeutet nun nach den Ausführungen in Abschnitt II, A, daß die Schwingungen elliptisch sind. Bezeichnen wir die zu den beiden Wellen mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 gehörigen Azimute der Schwingungsrichtung mit w_1 bzw. w_2 , so muß jeder dieser beiden Winkel der dritten Gleichung in 39) genügen. Das ist nur dann der Fall, wenn $2w_2 = 2w_1 \pm \pi$ ist. Denn nur in gegenüberliegenden Quadranten hat die Funktion tg dasselbe Vorzeichen. Es besteht mithin ganz allgemein die Beziehung:

$$48) \quad w_2 = w_1 \pm \frac{\pi}{2}$$

das heißt, die beiden elliptischen Schwingungen liegen immer senkrecht zueinander, sie haben gekreuzte Achsen.

Zur vollständigen Bestimmung der Schwingungen bleibt noch die Frage nach der Richtung ihrer Achsen und nach dem Achsenverhältnis zu beantworten. Hierzu benutzen wir die in Abschnitt II, A entwickelte Darstellung für das komplexe Azimut einer elliptischen Schwingung in der Form

$$49) \quad \operatorname{tg} w = \frac{B}{A} e^{i\Delta}; \quad \frac{B}{A} = \operatorname{tg} \chi; \quad e^{i\Delta} = \cos \Delta + i \sin \Delta$$

χ und Δ haben im vorliegenden Falle nur die Bedeutung mathematischer Hilfsgrößen für die folgende kurze Zwischenrechnung: Wenn es möglich wäre, die elliptischen Schwingungen im Kristall durch Hinzufügung je einer Phasendifferenz in lineare zu verwandeln, so wäre Δ die Phasendifferenz, welche man den nach den Richtungen x und y genommenen Komponenten einer der elliptischen Schwingungen erteilen müßte, um daraus eine lineare Schwingung mit dem Azimut χ gegen die Richtung x zu erhalten. In Wirklichkeit ist eine solche Umwandlung der Schwingungen im Kristall nicht möglich. Es sollen aber die Hilfsgrößen χ und Δ nur dazu benutzt werden, um das komplexe Azimut w auf das reelle Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ der Schwin-

gungsellipse und auf das reelle Achsenazimut $(a, x) = \psi$ zu transformieren. Schreiben wir

$$50) \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \vartheta$$

und nennen ϑ kurz die Elliptizität der Schwingung; die Größen χ , ψ , Δ sind sämtlich auf dasselbe System x , y bezogen, ϑ ist eine von dem Bezugssystem unabhängige Größe. Nach der Theorie der elliptischen Polarisation bestehen nun zwischen ϑ und den auf dasselbe System bezogenen Winkeln χ , ψ , Δ Zusammenhänge, die am einfachsten durch folgende Merkgel wieder gegeben werden (Abb. 28):

In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck sind 2ψ und 2ϑ Katheten, 2χ Hypotenuse und Δ der von 2ψ und 2χ eingeschlossene Winkel.

Die interessierenden Zusammenhänge ergeben sich dann einfach durch Anwendung der bekannten NEPERSchen Analogien auf das rechtwinklige sphärische Dreieck, nämlich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi &= \operatorname{tg} 2\chi \cos \Delta \\ \operatorname{tg} 2\vartheta &= \sin 2\psi \operatorname{tg} \Delta \\ \sin 2\vartheta &= \sin 2\chi \sin \Delta \\ \cos 2\chi &= \cos 2\psi \cos 2\vartheta \end{aligned}$$

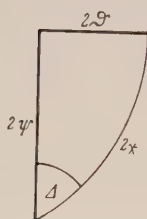


Abb. 28. Merkgel für den Zusammenhang der Parameter χ , Δ , ψ , ϑ einer elliptischen Schwingung. Δ : kompensierende Phasendifferenz. χ : Azimut der wiederhergestellten linearen Polarisation. ψ : Azimut der großen Ellipsenachse. ϑ : Elliptizität. Δ , χ , ψ auf dieselbe Richtung bezogen.

51)

Hiermit können wir nun in 49) die mathematischen Hilfsgrößen χ und Δ eliminieren und $\operatorname{tg} w$ durch Funktionen der physikalischen Parameter ψ und ϑ ausdrücken. ϑ kann sich aus den vorstehenden Transformationsgleichungen positiv oder negativ ergeben. Durch das Vorzeichen wird der Umlaufsinn der elliptischen Schwingungen gekennzeichnet. Benutzen wir die Identitäten

$$\operatorname{tg} \chi \cos \Delta = \frac{\sin 2\chi}{1 + \cos 2\chi} \cos \Delta$$

$$\operatorname{tg} \chi \sin \Delta = \operatorname{tg} \chi \cos \Delta \operatorname{tg} \Delta$$

so erhalten wir mit Hilfe der Transformationsgleichungen 51):

$$52) \quad \operatorname{tg} \chi \cos \Delta = \frac{\sin 2\psi \cos 2\vartheta}{1 + \cos 2\psi \cos 2\vartheta}$$

$$\operatorname{tg} \chi \sin \Delta = \frac{\sin 2\vartheta}{1 + \cos 2\psi \cos 2\vartheta}$$

und damit aus 49) wegen $\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} \chi \cos \Delta + i \operatorname{tg} \chi \sin \Delta$:

$$53) \quad \operatorname{tg} w = \frac{\sin 2\psi \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta}{1 + \cos 2\psi \cos 2\vartheta}$$

Diese Beziehung gilt für beide Schwingungen im Kristall, wenn man die Parameter der einen durch den Index₁, die der anderen durch den Index₂ kennzeichnet. Wir machen nun von der Beziehung 48) Gebrauch. Danach muß

$$\operatorname{tg} (w_2 - w_1) = \pm \infty$$

sein, daß heißt, in der Entwicklung

$$\operatorname{tg} (w_2 - w_1) = \frac{\operatorname{tg} w_2 - \operatorname{tg} w_1}{1 + \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_1}$$

ist der Nenner $1 + \operatorname{tg} w_2 \operatorname{tg} w_1 = 0$

Wir erhalten also mit Hilfe von 53) für die Wertepaare ψ_1, ϑ_1 bzw. ψ_2, ϑ_2 die Bedingung

$$1 + \frac{(\sin 2\psi_1 \cos 2\vartheta_1 + i \sin 2\vartheta_1)(\sin 2\psi_2 \cos 2\vartheta_2 + i \sin 2\vartheta_2)}{(1 + \cos 2\psi_1 \cos 2\vartheta_1)(1 + \cos 2\psi_2 \cos 2\vartheta_2)} = 0$$

Durch Sonderung der reellen und imaginären Bestandteile zerfällt diese Bedingung in zwei:

$$54) \quad 1 + \frac{\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_2 - \sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2}{(1 + \cos 2\psi_1 \cos 2\vartheta_1)(1 + \cos 2\psi_2 \cos 2\vartheta_2)} = 0$$

$$\sin 2\psi_1 \cos 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_2 + \sin 2\psi_2 \sin 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_2 = 0$$

Da nun die Achsen beider Schwingungsellipsen, wie oben nachgewiesen, gekreuzt zueinander liegen, sind auch die Azimute ihrer großen Achsen um 90° verschieden:

$$\psi_2 - \psi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

Setzt man diese Beziehung in die erste der Bedingungen 54) ein, so wird auch die linke Seite dieser Bedingung Null, d. h. die Gleichung wird identisch erfüllt. Die zweite der Bedingungen 54) liefert

$$\sin 2\psi_1 \sin 2(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$

Es ist also für ein beliebiges Azimut ψ_1 immer

$$55) \quad \vartheta_2 = \vartheta_1$$

Nach 50) heißt das: Beide Schwingungsellipsen haben gleiches Achsenverhältnis und gleichen Umlaufsinn. Sie sind also einander ähnlich.

Die Berechnung des Achsenverhältnisses und des Achsenazimuts erfolgt mittels der dritten Gleichung in 39) und mittels der Beziehung 53).

3. Die Fortpflanzungsrichtung des Lichts liegt in einer optischen Symmetrieebene des Kristalls

Verläuft die Fortpflanzungsrichtung z in einer optischen Symmetrieebene des Kristalls, so liegt die Schnittkurve der komplexen Indikatrix mit der Normalebene zur Fortpflanzungsrichtung spiegelbildlich zur Symmetrieebene. Die in diesem Falle reellen Hauptachsenrichtungen der Schnittkurve liegen also parallel und senkrecht zur Symmetrieebene, und es lassen sich daher die Koordinatenrichtungen x, y jetzt durch eine reelle Drehungstransformation in die Richtungen der Hauptachsen der Schnittkurve bringen. Nach Ausführung dieser Transformation wird die Gleichung der Schnittkurve entsprechend 33) die Form haben:

$$56) \quad \frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} = 1$$

und der Vergleich mit 32) ergibt, daß nun die Indikatrixkonstante

$$56a) \quad n_{12} = \infty$$

ist und die komplexen Brechungsindizes

$$56b) \quad n_1 = n_{11}; \quad n_2 = n_{22}$$

werden. Wegen 56a) erhält man aus der dritten Gleichung in 39):

$$56c) \quad w_1 = 0; \quad w_2 = \frac{\pi}{2}$$

Die beiden Wellen sind also in diesem Falle linear polarisiert, und ihre Schwingungsrichtungen liegen parallel und senkrecht zur Symmetrieebene.

Die Berechnung der Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten vereinfacht sich folgendermaßen: Von den Achsenrichtungen der Koordinatensysteme $x', y', z', x'', y'', z''$ fällt ein Paar zusammen und liegt senkrecht zur Symmetrieebene. Es sei dies das Paar y', y'' . Wenn andererseits im System x, y, z gemäß 56) x parallel zur Symmetrieebene und y senkrecht zur Symmetrieebene gelegt ist, ergeben sich,

sofern man die Richtungskosinus im Schema 26) sämtlich durch α'_3 bzw. α''_3 ausdrückt, folgende Vereinfachungen:

$$(57) \quad \begin{array}{l|l} \alpha'_1 = \sqrt{1 - \alpha'^2_3}; \beta'_1 = 0; \gamma'_1 = \alpha'_3 & \alpha''_1 = \sqrt{1 - \alpha''^2_3}; \beta''_1 = 0; \gamma''_1 = \alpha''_3 \\ \alpha'_2 = 0 & \alpha''_2 = 0 \\ \alpha'_3 & \alpha''_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta'_2 = 1; \gamma'_2 = 0 \\ \beta'_3 = 0; \gamma'_3 = \sqrt{1 - \alpha'^2_3} \\ \beta''_2 = 1; \gamma''_2 = 0 \\ \beta''_3 = 0; \gamma''_3 = \sqrt{1 - \alpha''^2_3} \end{array}$$

Damit reduzieren sich in 28) die Konstanten p^2_{hk} und q^2_{hk} auf

$$(58) \quad \begin{aligned} p^2_{11} &= (1 - \alpha'^2_3) p^2_{x'} + \alpha'^2_3 p^2_{z'}; & p^2_{22} &= p^2_{y'} \\ q^2_{11} &= (1 - \alpha''^2_3) q^2_{x''} + \alpha''^2_3 q^2_{z''}; & q^2_{22} &= q^2_{y''} \end{aligned}$$

Es werden also wie bei durchsichtigen Kristallen nur die Indizes der einen Welle von der Richtung abhängig, und es bleiben die Indizes der anderen Welle mit der Variation der Fortpflanzungsrichtung in der Symmetrieebene konstant. Die mit der Richtung veränderlichen Größen p^2_{11} und q^2_{11} befolgen nach 58) das FRESNELSche Gesetz. Hinsichtlich der Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten aber gilt dies nicht; denn diese berechnen sich aus p^2_{11} und q^2_{11} durch Anwendung der Formeln 47). Hierdurch wird das Gesetz ihrer Abhängigkeit von der Richtung gegenüber dem Gesetz, welches nach 58) die Größen p^2_{11} und q^2_{11} befolgen, im allgemeinen wesentlich anders.

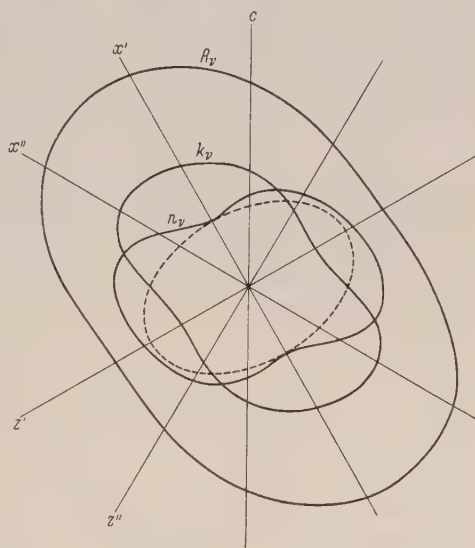


Abb. 29. Variation von n_v , k_v , R_v innerhalb der optischen Symmetrieebene monokliner Kristalle. c : Richtung der kristallographischen Vertikalachse. Die Hauptachsenrichtungen x und z der Indikatrix sind komplex.

$$\text{Beispiel: } \begin{cases} (x', c) = 30^\circ; (x'', c) = 60^\circ \\ n_x = 2 - 4i; n_z = 3 - 2i. \end{cases}$$

Punktiert: FRESNELSche Ellipse für n_v bei fehlender Absorption.

Der allgemeinste Fall, in dem diese vereinfachte Berechnung der Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten gemäß 58) und 47) angewandt werden kann, ist für Fortpflanzungsrichtungen innerhalb der Symmetrieebene monokliner Kristalle gegeben. In Abb. 29 ist das Ergebnis einer solchen Berechnung dargestellt. c ist die Richtung der kristallographischen Hauptachse; x' , z' bzw. x'' , z'' bezeichnen das in

der Symmetrieebene liegende Hauptachsenpaar der Indikatrix. Der Berechnung zugrunde gelegt sind die beiden Hauptbrechungsindizes $n_x = 2 - 4i$, $n_y = 3 - 2i$ sowie die Winkel $(x', c) = 30^\circ$, $(x'', c) = 60^\circ$. Die beiden mit der Fortpflanzungsrichtung z veränderlichen Richtungskosinus sind $\alpha'_3 = \cos \{(z, c) - (x', c)\}$ und $\alpha''_3 = \cos \{(z, c) - (x'', c)\}$. Trägt man die zu den verschiedenen Fortpflanzungsrichtungen berechneten Werte n und k senkrecht zu dieser Fortpflanzungsrichtung auf, so erhält man für die Variation von n und k in der Symmetrieebene

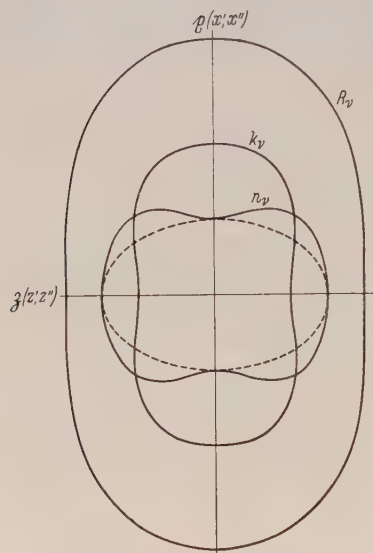


Abb. 30. Variation von n_r , k_r , R_r innerhalb einer optischen Symmetrieebene rhombischer Kristalle. Die Hauptachsenrichtungen der Indikatrix sind reell und fallen mit den kristallographischen Hauptachsen zusammen.

Beispiel: $n_x = 2 - 4i$; $n_y = 3 - 2i$.

Punktiert: FRESNELsche Ellipse für n_r bei fehlender Absorption.

das in Abb. 29 dargestellte Bild. Punktiert eingetragen ist ferner die dem FRESNELschen Gesetz bei fehlender Absorption entsprechende Ellipse. Die durch die Absorption veränderte Verteilung der Brechungsindizes weicht erheblich davon ab. Die mit R bezeichnete Kurve schließlich zeigt die Verteilung des Reflexionsvermögens für die in der Symmetrieebene liegende Komponente.

Für Fortpflanzungsrichtungen innerhalb einer der optischen Symmetrieebenen rhombischer Kristalle tritt nur insofern eine weitere Vereinfachung der Berechnung ein, als in den Formeln 58) $\alpha'_3 = \alpha''_3$ wird, weil in Kristallen dieser Symmetrie das Koordinatensystem x', y', z' stets mit dem System x'', y'', z'' aus Symmetriegründen zusammenfällt. Die entsprechende Verteilung der Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten (wie auch des Reflexionsvermögens für die in der Symmetrieebene liegende Komponente) zeigt

unter denselben zahlenmäßigen Voraussetzungen für n_x und n_y wie oben Abb. 30. Auch hier ist die dem FRESNELschen Gesetz bei fehlender Absorption entsprechende Ellipse eingetragen.

Für Kristalle des quadratischen, hexagonalen und trigonalen Systems gelten die Beziehungen 58) mit $\alpha'_3 = \alpha''_3$ für alle beliebigen Fortpflanzungsrichtungen, wobei noch infolge der Rotationssymmetrie der Indikatrix $p_{z'}^2 = p_{y'}^2$ und $q_{z''}^2 = q_{y''}^2$ wird. Eine weitere prinzipielle Vereinfachung gegenüber den Verhältnissen rhombischer Kristalle tritt aber hier nicht mehr ein, so daß Abb. 30 beispielsweise auch

die Verteilung der optischen Konstanten in einem Hauptschnitt der genannten höher symmetrischen Kristalle zur Anschauung bringt. Da bei diesen Kristallen jede Fortpflanzungsrichtung einem Hauptschnitt angehört, treten bei ihnen nur lineare Schwingungen auf.

Anmerkung: Lineare Schwingungszustände kommen auch für Fortpflanzungsrichtungen außerhalb einer Symmetrieebene bei Kristallen niedriger Symmetrie vor, wenn zufällig die rechte Seite der 3. Gleichung in 39) sich reell ergibt. Schreibt man diese Gleichung mit Hilfe von 29) in der Form

$$59) \quad \operatorname{tg} 2w = \frac{2(p_{12}^2 + i q_{12}^2)}{p_{11}^2 - p_{22}^2 + i(q_{11}^2 - q_{22}^2)}$$

macht hierin den Nenner reell und setzt dann den Faktor von i gleich Null, so erhält man allgemein als Bedingung für das Auftreten linearer Schwingungen:

$$60) \quad q_{12}^2(p_{11}^2 - p_{22}^2) - p_{12}^2(q_{11}^2 - q_{22}^2) = 0$$

4. Singuläre Richtungen der Lichtfortpflanzung

Singuläre Richtungen der Lichtfortpflanzung ergeben sich, wenn die komplexen Brechungsindizes für beide Wellen gleich werden, d. h. wenn beide Wellen gleiche Brechungsindizes und gleiche Absorptionskoeffizienten haben. Das tritt ganz allgemein ein, wenn in 39) der Wurzelausdruck verschwindet:

$$61) \quad \left(\frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \right)^2 + \left(\frac{2}{n_{12}^2} \right)^2 = 0$$

Die linke Seite dieser Beziehung kann man als Produkt zweier konjugiert komplexer Größen schreiben:

$$61 a) \quad \left\{ \frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} + i \frac{2}{n_{12}^2} \right\} \left\{ \frac{1}{n_{11}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} - i \frac{2}{n_{12}^2} \right\} = 0$$

Es muß dann einer der beiden Faktoren Null werden. Man kann daher die Bedingung 61) auch in der Form schreiben:

$$61 b) \quad \frac{1}{n_{12}^2} - \frac{1}{n_{22}^2} \pm i \frac{2}{n_{12}^2} = 0$$

Optische Achsen. — Die Bedingung 61 b) wird identisch erfüllt, wenn $n_{12} = \infty$ und gleichzeitig $n_{11} = n_{22}$ ist. Nach der dritten Gleichung in 39) wird dann w unbestimmt, d. h., in solchen Richtungen pflanzt sich natürliches Licht fort. Die Bedingung $n_{12} = \infty$ bedeutet aber nach 56 a), daß solche Fortpflanzungsrichtungen immer in einer optischen Symmetrieebene des Kristalls liegen. Als Gleichung der Schnittkurve der Indikatrix mit der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene ergibt sich also in diesem Fall nach 56) wegen der Voraussetzung $n_1 = n_2$:

$$\frac{x^2 + y^2}{n^2} = 1$$

Diese Schnittkurve kann als ein Kreis mit komplexem Radius gedacht werden. Aus Symmetriegründen liegen solche Schnittkurven bei kubischen Kristallen für alle Fortpflanzungsrichtungen vor, bei Kristallen des quadratischen, hexagonalen und trigonalen Systems nur für die Richtungen der Rotationsachse der Indikatrix: es fällt dann die Fortpflanzungsrichtung mit der kristallographischen Hauptachse zusammen. Diese Achse ist also bei den Kristallen des quadratischen, hexagonalen und trigonalen Systems, auch wenn diese beliebig stark absorbieren, eine wahre optische Achse.

In absorbierenden Kristallen niederer Symmetrie dagegen gibt es in keiner Symmetrieebene Richtungen, in denen $n_1 = n_2$ wird. Denn das würde nach 56 b) und 29) zur Voraussetzung haben:

$$p_{11}^2 = p_{22}^2; \quad q_{11}^2 = q_{22}^2$$

und es müßte dann z. B. für einen rhombischen Kristall wegen $\alpha'_3 = \alpha''_3$ nach 58) die Bedingung

$$\frac{p_{y'}^2 - p_{x'}^2}{p_{z'}^2 - p_{x'}^2} = \frac{q_{y''}^2 - q_{x''}^2}{q_{z''}^2 - q_{x''}^2}$$

erfüllt sein, was die gegenseitige Unabhängigkeit der komplexen drei Hauptbrechungsindizes bei solchen Kristallen beschränken würde.

Windungsachsen. — Die Bedingung 61 b) kann außer in dem eben behandelten Sonderfall der optischen Achsen hoch symmetrischer Kristalle auch bei niederer Symmetrie durch eine allgemeinere funktionelle Beziehung zwischen n_{11} , n_{22} und n_{12} erfüllt werden, wobei aber n_{12} nicht unendlich werden darf. Die entsprechenden Richtungen liegen daher außerhalb von Symmetrieebenen und können also nur in Kristallen von höchstens rhombischer Symmetrie auftreten. Setzt man 61 b) in die 3. Gleichung 39) ein, so erhält man für den Schwingungszustand:

$$62) \quad \operatorname{tg} 2w = \pm i$$

Reduziert man nun den doppelten Winkel auf den einfachen gemäß der bekannten Formel

$$\operatorname{tg} 2w = \frac{2 \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg}^2 w}$$

so ergibt sich für den einfachen Winkel ebenfalls

$$63) \quad \operatorname{tg} w = \pm i$$

Daher zerfällt die Gleichung 53) im vorliegenden Fall in folgende zwei Bedingungen

$$64) \quad \begin{aligned} \sin 2\psi \cos 2\vartheta &= 0 \\ \frac{\sin 2\vartheta}{1 + \cos 2\psi \cos 2\vartheta} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Beiden Bedingungen wird unabhängig voneinander genügt durch $\vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$. Eine solche Elliptizität bedeutet aber nach 50), daß das

Achsenverhältnis der Schwingungsellipsen gleich Eins ist, d. h., die Schwingung ist eine links zirkulare oder eine rechts zirkulare. Da nun nach früherem die beiden zu derselben Fortpflanzungsrichtung gehörigen Schwingungsellipsen immer dasselbe Achsenverhältnis und denselben Umlaufsinn haben, und da ferner im vorliegenden Falle beide Wellen auch gleiche komplexe Brechungsindizes besitzen, so sind diese beiden Wellen mit keinen Hilfsmitteln zu trennen, d. h., in diesen durch die Bedingung 61 b) im allgemeinen Falle bestimmten singulären Richtungen gibt es nur eine Welle, die aber nicht wie in den Richtungen wahrer optischer Achsen beliebig, sondern links oder rechts zirkular polarisiert ist. Diese singulären Richtungen werden „Windungsachsen“ genannt. Entsprechend dem doppelten Vorzeichen in 63) treten diese singulären Richtungen immer paarweise auf: Einer Windungsachse mit links zirkularer Polarisation ist immer eine Windungsachse mit rechts zirkularer Polarisation zugeordnet.

Lage und Eigenschaften der Windungsachsen im rhombischen System. — Eine strenge explizite Berechnung für die Lage der Windungsachsen bei beliebig starker Absorption des Kristalls liegt bisher nur für rhombische Kristalle vor. Auch hier gelang sie nur durch Anwendung von Kunstgriffen; denn die Bestimmung der Richtungskosinus, mit denen die Indikatrixkonstanten n_{hk}

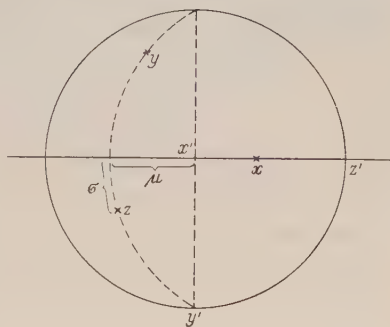


Abb. 31. Längen- und Breitenkoordinaten μ bzw. σ einer beliebigen Richtung z , bezogen auf eine optische Symmetrieachse und auf eine optische Symmetrieebene eines rhombischen Kristalls.

der Gleichung 61 b) genügen, ist praktisch unmöglich. Die gesuchten Richtungen lassen sich aber verhältnismäßig leicht explizit darstellen, wenn man mittels einer stereographischen Projektion die rechtwinkligen Koordinaten in Längen- und Breitenkoordinaten (meridionale und äquatoriale Koordinaten) umwandelt. Die Richtungen der Koordinatensysteme x', y', z' und x'', y'', z'' mögen $x' \parallel x'', y' \parallel y''$ und $z' \parallel z''$ liegen. Die z -Achse des Koordinatensystems x, y, z möge wieder die Richtung der Fortpflanzung des Lichts bezeichnen. Wir drehen dann das Koordinatensystem x, y, z bei Veränderung der Fortpflanzungsrichtung immer so, daß die Richtung x in einer der optischen Symmetrieebenen des rhombischen Kristalls verbleibt, und zwar soll dies die Symmetrieebene ($x'z'$) sein (Abb. 31). Die Ebene (yz) bildet dann mit der Hauptachse x' der Indikatrix den Winkel μ und die Richtung z mit der Symmetrieebene ($x'z'$) den Winkel σ . μ ist dann

die Längenkoordinate, σ die Breitenkoordinate der Fortpflanzungsrichtung z .

Durch Variation von μ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und durch Veränderung von σ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ kann die Fortpflanzungsrichtung alle möglichen Lagen im Kristall annehmen. Zwischen den Richtungskosinus α, β, γ im Schema 26) und den Winkeln μ und σ bestehen dann folgende, aus Abb. 31 leicht ableitbare Beziehungen:

$$65) \quad \begin{array}{lll} \alpha_1 = \sin \mu & \beta_1 = 0 & \gamma_1 = \cos \mu \\ \alpha_2 = \cos \mu \sin \sigma & \beta_2 = -\cos \sigma & \gamma_2 = -\sin \mu \sin \sigma \\ \alpha_3 = \cos \mu \cos \sigma & \beta_3 = \sin \sigma & \gamma_3 = -\sin \mu \cos \sigma \end{array}$$

Setzt man die Werte dieser Richtungskosinus in 28) ein und führt dann die nach 29) zusammengefaßten Indikatrixkonstanten n_{hk} in die Bedingung 61 b) ein, so erhält man diese Bedingung in der Form

$$66) \quad \begin{aligned} & (p_{x'}^2 + i q_{x'}^2)(\sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) - (p_{y'}^2 + i q_{y'}^2) \cos^2 \sigma \\ & + (p_{z'}^2 + i q_{z'}^2)(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) \\ & \pm 2i\{(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) + i(q_{x'}^2 - q_{z'}^2)\} \sin \mu \cos \mu \sin \sigma = 0 \end{aligned}$$

Nach Sonderung des Reellen vom Imaginären zerfällt diese Bedingung in folgende zwei:

$$67) \quad \begin{aligned} & p_{x'}^2(\sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) - p_{y'}^2 \cos^2 \sigma + p_{z'}^2(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) \\ & \mp 2(q_{x'}^2 - q_{z'}^2) \sin \mu \cos \mu \sin \sigma = 0 \\ & q_{x'}^2(\sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) - q_{y'}^2 \cos^2 \sigma + q_{z'}^2(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) \\ & \pm 2(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) \sin \mu \cos \mu \sin \sigma = 0 \end{aligned}$$

Hierbei gehören immer entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen zusammen. Multipliziert man die erste Bedingung in 67) mit $p_{x'}^2 - p_{z'}^2$, die zweite mit $q_{x'}^2 - q_{z'}^2$ und faßt dann beide Bedingungen, das eine Mal durch Addition, das andere Mal durch Subtraktion zusammen, so erhält man die neuen Bedingungen nach geeigneter, aber weitläufiger Umformung in folgender Gestalt:

$$68) \quad \begin{aligned} & P_{x'}^2(\sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) - P_{y'}^2 \cos^2 \sigma + P_{z'}^2(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) = 0 \\ & Q_{x'}^2(\sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) \mp 2 P_{y'}^2 \sin \mu \cos \mu \sin \sigma \\ & + Q_{z'}^2(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) = 0 \end{aligned}$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt sind:

$$69) \quad \begin{aligned} P_{x'}^2 &= p_{x'}^2(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) + q_{x'}^2(q_{x'}^2 - q_{z'}^2) & Q_{x'}^2 &= p_{x'}^2 q_{y'}^2 - p_{y'}^2 q_{x'}^2 \\ P_{y'}^2 &= p_{y'}^2(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) + q_{y'}^2(q_{x'}^2 - q_{z'}^2) & Q_{z'}^2 &= p_{z'}^2 q_{y'}^2 - p_{y'}^2 q_{z'}^2 \\ P_{z'}^2 &= p_{z'}^2(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) + q_{z'}^2(q_{x'}^2 - q_{z'}^2) \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung 68) läßt sich nunmehr die Koordinate μ leicht durch σ ausdrücken. Man erhält:

$$70) \quad \sin^2 \mu = \frac{P_{y'}^2 - P_{z'}^2 + (P_{x'}^2 - P_{y'}^2) \sin^2 \sigma}{(P_{x'}^2 - P_{z'}^2)(1 + \sin^2 \sigma)}$$

Damit ergibt sich

$$71) \quad \cos^2 \mu = \frac{P_{x'}^2 - P_{y'}^2 + (P_{y'}^2 - P_{z'}^2) \sin^2 \sigma}{(P_{x'}^2 - P_{z'}^2)(1 + \sin^2 \sigma)}$$

ferner:

$$72) \quad \begin{aligned} \sin^2 \mu - \cos^2 \mu \sin^2 \sigma &= \frac{(P_{y'}^2 - P_{z'}^2) \cos^2 \sigma}{P_{x'}^2 - P_{z'}^2} \\ \cos^2 \mu - \sin^2 \mu \sin^2 \sigma &= \frac{(P_{x'}^2 - P_{y'}^2) \cos^2 \sigma}{P_{x'}^2 - P_{z'}^2} \end{aligned}$$

Setzt man alle diese Ausdrücke in die zweite Gleichung 68) ein, so erhält man zur Bestimmung von σ die Beziehung

$$73) \quad \{Q_{x'}^2(P_{y'}^2 - P_{z'}^2) + Q_{z'}^2(P_{x'}^2 - P_{y'}^2)\} \cos^2 \sigma \\ \mp 2 P_{y'}^2 \frac{\sin \sigma}{1 + \sin^2 \sigma} \sqrt{\{(P_{x'}^2 - P_{y'}^2) + (P_{y'}^2 - P_{z'}^2) \sin^2 \sigma\} \{(P_{y'}^2 - P_{z'}^2) + (P_{x'}^2 - P_{y'}^2) \sin^2 \sigma\}} \\ = 0$$

Zur Berechnung von σ aus dieser Beziehung benutzt man im allgemeinen Falle am besten die regula falsi. Die beiden Grenzwerte für den Ausdruck auf der linken Seite sind:

$$\text{für } \sigma = 0: \quad Q_{x'}^2(P_{y'}^2 - P_{z'}^2) + Q_{z'}^2(P_{x'}^2 - P_{y'}^2)$$

$$\text{für } \sigma = \frac{\pi}{2}: \quad \mp P_{y'}^2(P_{x'}^2 - P_{z'}^2)$$

Man sucht denjenigen Zwischenwert von σ , welcher den Ausdruck auf der linken Seite von 73) zu Null macht. Hat man diesen Wert gefunden, so ergibt sich die zweite Koordinate μ der Windungsachse aus 70).

Ist σ klein, so kann man an Stelle von 73) und 70) die expliziten Näherungsformeln benutzen:

$$73a) \quad \sigma = \pm \frac{Q_{x'}^2(P_{y'}^2 - P_{z'}^2) + Q_{z'}^2(P_{x'}^2 - P_{y'}^2)}{2 P_{y'}^2 \sqrt{(P_{x'}^2 - P_{y'}^2)(P_{y'}^2 - P_{z'}^2)}} \\ \sin \mu = \pm \sqrt{\frac{P_{y'}^2 - P_{z'}^2}{P_{x'}^2 - P_{z'}^2}}$$

Die zweite der vorstehenden Formeln weist durch ihre Form auf die bekannte Beziehung für den Winkel der optischen Achsen in vollkommen durchsichtigen Kristallen hin. Sofern der Winkel 2σ zwischen einem Paar der Windungsachsen sehr klein ist, liegen diese Rich-

tungen in der Tat sehr benachbart denjenigen Richtungen, die der Kristall bei fehlender Absorption als optische Achsen haben würde. Es werden nämlich bei fehlender Absorption wegen $q^2=0$ nach 69) auch die Größen $Q^2=0$, und die Größen P^2 vereinfachen sich so, daß man an Stelle von 73 a) erhält:

$$73\text{ b)} \quad \sigma = 0; \quad \sin \mu = \pm \sqrt{\frac{p_{y'}^2 - p_{z'}^2}{p_{x'}^2 - p_{z'}^2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{n_{y'}^2} - \frac{1}{n_{z'}^2}}{\frac{1}{n_{x'}^2} - \frac{1}{n_{z'}^2}}} = \sin V$$

μ wird also in diesem Grenzfalle mit dem halben Winkel der optischen Achsen identisch. Man kann also auch sagen, in absorbierenden optisch „zweiachsigen“ Kristallen hat sich jede wahre optische Achse in ein Paar Windungsachsen aufgelöst.

Im rhombischen System besteht ferner eine kürzlich aufgedeckte Merkwürdigkeit: In Richtung $1 \rightarrow 1'$ (Abb. 2) einer Windungsachse möge sich eine links zirkulare Schwingung fortpflanzen. Das Vorhandensein der drei Symmetrieebenen bei einem solchen Kristall erfordert dann für die Richtung und für die Gegenrichtung der vier Windungsachsen folgende zirkulare Schwingungszustände:

| | | | | | |
|-----|--------------------|--------|------|--------------------|--------|
| 74) | $1 \rightarrow 1'$ | links | (ab) | $3' \rightarrow 3$ | rechts |
| | —— (a c) —— | | | —— (a c) —— | |
| | $2 \rightarrow 2'$ | rechts | | $4' \rightarrow 4$ | links |
| | —— (c b) —— | | | —— (c b) —— | |
| | $3 \rightarrow 3'$ | links | | $1' \rightarrow 1$ | rechts |
| | —— (a c) —— | | | —— (a c) —— | |
| | $4 \rightarrow 4'$ | rechts | | $2' \rightarrow 2$ | links |

Die gleichen Betrachtungen gelten auch für die Richtungen mit elliptischen Schwingungszuständen. Es ergibt sich danach hier eine interessante Erscheinung: Die Kristallsymmetrie erfordert es, daß der Umlaufsinn der Schwingungen sich mit der Fortpflanzungsrichtung umkehrt.

Ist das einfallende Licht links zirkular polarisiert und kann es von der einen Seite in die Windungsachse eindringen, so kann es das nach Umklappung der Windungsachse nicht mehr. Es lassen sich also die freien Enden der Windungsachsen im Kristall unterscheiden. Diese haben für zirkular polarisiertes Licht die Eigenschaft von optischen Ventilen. Man kann diese merkwürdige Erscheinung an einer Andalusitplatte, die senkrecht zu einem Paar Windungsachsen geschnitten ist, im durchfallenden zirkular polarisierten Licht bei konoskopischem Strahlengang leicht demonstrieren: Schaltet man hinter den Polarisator ein $1/4 \lambda$ -Glimmerplättchen in

Diagonalstellung ein, so erscheint ohne Analysator die eine Windungsachse als hellste, die andere als dunkelste Stelle des konoskopischen Bildes. Wenn man hierauf den Kristall um eine in der Halbierungsebene der Windungsachsen und zugleich in der Ebene des Kristalls liegende Richtung umklappt, erscheinen die vorher bezeichneten Stellen des konoskopischen Bildes in ihrer Helligkeit vertauscht. Wenn man hingegen den Kristall um eine in der Ebene der Windungsachsen und zugleich in der Ebene des Kristalls liegende Richtung umklappt, ändert sich an der Helligkeitsverteilung nichts. Aus Abb. 32 ist ersichtlich, daß beiderlei Verhalten nur durch die optische Polarität der Windungsachsen erklärt werden kann. Da beim Andalusit wegen der schwachen Absorption dieses Minerals je zwei Windungsachsen sehr nahe beieinander liegen, muß man zu ihrer deutlichen Trennung im Konoskop Objektive längerer Brennweite verwenden. Auch empfiehlt es sich, die Andalusitplatte reichlich dick zu wählen.

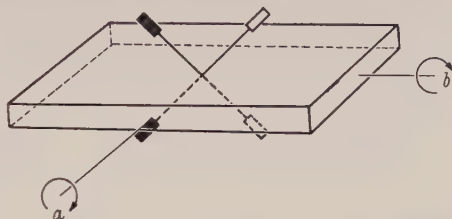


Abb. 32. Zur Demonstration der optischen Polarität der Windungsachsen in rhombischen Kristallen. Bei Umklappung des Kristalls um die Richtung a erscheinen die Intensitäten in den Spuren der Windungsachsen vertauscht. Bei Umklappung um die Richtung b bleiben sie unverändert.

Der komplexe Brechungsindex in Richtung einer Windungsachse ist nach 39) und 61) allgemein bestimmt durch

$$75) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{11}^2} + \frac{1}{n_{22}^2} \right) = p^2 + iq^2$$

Mit Hilfe von 28), 29) und 65) erhält man

$$76) \quad \begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{2} \{ p_x^2 (\sin^2 \mu + \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) + p_y^2 \cos^2 \sigma + p_z^2 (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) \} \\ q^2 &= \frac{1}{2} \{ q_x^2 (\sin^2 \mu + \cos^2 \mu \sin^2 \sigma) + q_y^2 \cos^2 \sigma + q_z^2 (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \sin^2 \sigma) \} \end{aligned}$$

Die Koordinaten σ und μ der Windungsachsen berechnen sich aus 73) und 70) bzw. 73a); die Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten ergeben sich dann explizit mit Hilfe der Formeln 47).

D. Fortpflanzung und Polarisation des Lichts in schwach absorbierenden Kristallen

Kristalle, die in Dünnschliffdicke noch lichtdurchlässig sind, haben Absorptionskoeffizienten in der Größenordnung von 10^{-4} oder noch kleiner. Man kann dann in 22) und 23) ohne weiteres k^2 neben n^2 vernachlässigen und erhält

$$77) \quad p^2 = \frac{1}{n^2}; \quad q^2 = \frac{2k}{n^3}$$

Da hiernach für solche Kristalle die Koeffizienten p^2 von den Absorptionskoeffizienten k ganz unabhängig sind, stellt der reelle Teil der Gleichung 24) ein Ellipsoid mit den Halbachsen n_x , n_y , n_z dar. Die Brechungsindizes solcher Kristalle leiten sich also genau so wie die durchsichtiger Kristalle aus einem Indexellipsoid ab, und ihre Variation mit der Richtung befolgt unabhängig von der Symmetrie des Kristalls das FRESNELSche Gesetz. Dies trifft weitgehend auch noch bei solchen Kristallen zu, die schon so stark absorbieren, daß sie nur im auffallenden Licht beobachtet werden können, sofern nur bei ihnen k^2 erheblich kleiner ist als n^2 . Ein Beispiel dafür ist Antimonglanz. Die Variation der Brechungsindizes mit der Richtung weicht bei diesem Mineral, obwohl seine Absorptionskoeffizienten bereits ansehnliche Werte haben, so sehr wenig vom FRESNELSchen Gesetz ab, daß dies in einer Darstellung gemäß Abb. 30 noch gar nicht zum Ausdruck kommen würde.

Die Abhängigkeit der Absorptionskoeffizienten von der Richtung befolgt auch bei schwach absorbierenden Kristallen im allgemeinen ein komplizierteres Gesetz, da zufolge der zweiten Gleichung in 77) die Koeffizienten q^2 sowohl k wie n enthalten. Man kann aber dieses Gesetz leicht explizit darstellen: Die beiden ersten Beziehungen in 39) lassen sich zu folgender biquadratischen Gleichung für n zusammenfassen:

$$78) \quad \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{11}^2}\right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{22}^2}\right) = \frac{1}{n_{12}^4}$$

Mit Hilfe der Koeffizienten p^2 und q^2 kann diese geschrieben werden:

$$79) \quad \{p^2 - p_{11}^2 + i(q^2 - q_{11}^2)\} \{p^2 - p_{22}^2 + i(q^2 - q_{22}^2)\} = (p_{12}^2 + i q_{12}^2)^2$$

Sondert man hierin das Reelle vom Imaginären, so erhält man die beiden zunächst noch allgemein gültigen Beziehungen:

$$80) \quad \begin{aligned} (p^2 - p_{11}^2)(p^2 - p_{22}^2) - (q^2 - q_{11}^2)(q^2 - q_{22}^2) &= p_{12}^4 - q_{12}^4 \\ (p^2 - p_{11}^2)(q^2 - q_{22}^2) + (p^2 - p_{22}^2)(q^2 - q_{11}^2) &= 2p_{12}^2 q_{12}^2 \end{aligned}$$

Bei schwach absorbierenden Kristallen kann man nun, da die Koeffizienten q^2 hier sehr klein gegen p^2 sind, an Stelle der ersten dieser beiden Bedingungen schreiben:

$$81) \quad (p^2 - p_{11}^2)(p^2 - p_{22}^2) = p_{12}^4$$

Diese Bedingung drückt lediglich das schon oben erkannte Bestehen eines von den Absorptionskoeffizienten unabhängigen Indexellipsoids aus. In der zweiten Bedingung in 80) dürfen keine Vernachlässigungen gemacht werden, da dort alle Summanden gleiche Größenordnung haben. Lösen wir diese zweite Gleichung nach p^2 auf, so ergibt sich

$$p^2 = \frac{2p_{12}^2 q_{12}^2 + p_{11}^2 (q^2 - q_{22}^2) + p_{22}^2 (q^2 - q_{11}^2)}{(q^2 - q_{11}^2) + (q^2 - q_{22}^2)}$$

Es wird also

$$\begin{aligned} 82) \quad p^2 - p_{11}^2 &= \frac{2p_{12}^2 q_{12}^2 - (q^2 - q_{11}^2)(p_{11}^2 - p_{22}^2)}{(q^2 - q_{11}^2) + (q^2 - q_{22}^2)} \\ p^2 - p_{22}^2 &= \frac{2p_{12}^2 q_{12}^2 + (q^2 - q_{22}^2)(p_{11}^2 - p_{22}^2)}{(q^2 - q_{11}^2) + (q^2 - q_{22}^2)} \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in 81) ein, so erhält man, nach Potenzen von q^2 geordnet:

$$\begin{aligned} 83) \quad & q^4 \{ (p_{11}^2 - p_{22}^2)^2 + 4p_{12}^4 \} - q^2 (q_{11}^2 + q_{22}^2) \{ (p_{11}^2 - p_{22}^2)^2 + 4p_{12}^4 \} \\ & = 4p_{12}^4 q_{12}^4 - p_{12}^4 (q_{11}^2 + q_{22}^2)^2 + 2p_{12}^2 q_{12}^2 (q_{11}^2 - q_{22}^2) (p_{11}^2 - p_{22}^2) \\ & \quad - q_{11}^2 q_{22}^2 (p_{11}^2 - p_{22}^2)^2 \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich für jede Richtung in schwach absorbierenden Kristallen von beliebiger Symmetrie die Koeffizienten q^2 leicht berechnen. Sind noch die zugehörigen Brechungsindizes aus dem Indexellipsoid bestimmt, so ergeben sich die Absorptionskoeffizienten nach 77) aus

$$84) \quad k = \frac{1}{2} n^3 q^2$$

Für Fortpflanzungsrichtungen in einer Symmetrieebene werden zufolge 56 a) die Größen $p_{12}^2 = 0$ und $q_{12}^2 = 0$.

Damit reduziert sich die Bedingung 83) auf

$$q^4 - q^2 (q_{11}^2 + q_{22}^2) = -q_{11}^2 q_{22}^2$$

woraus in Übereinstimmung mit 56 b) folgt:

$$85) \quad q_1^2 = q_{11}^2; \quad q_2^2 = q_{22}^2$$

Für den Schwingungszustand ergibt sich, wenn man in 59) den Nenner reell macht, zunächst ganz allgemein:

$$86) \quad \frac{\operatorname{tg} 2 \omega = 2 \frac{p_{12}^2 (p_{11}^2 - p_{22}^2) + q_{12}^2 (q_{11}^2 - q_{22}^2) + i \{ q_{12}^2 (p_{11}^2 - p_{22}^2) - p_{12}^2 (q_{11}^2 - q_{22}^2) \}}{(p_{11}^2 - p_{22}^2)^2 + (q_{11}^2 - q_{22}^2)^2}}{\operatorname{tg} 2 \omega =}$$

Da für schwach absorbierende Kristalle nach 77) die Koeffizienten q^2 sehr klein gegen p^2 sind, kann der imaginäre Teil von 86) in der Regel gegen den reellen vernachlässigt werden, d. h., die Schwingungen sind im allgemeinen und unabhängig von der Symmetrie der Kristalle im wesentlichen linear. Stärkere Abweichungen hiervon und rasche Veränderungen des Schwingungszustandes mit der Richtung werden nur für solche Richtungen im Kristall eintreten, in denen die imaginären Bestandteile in 86) von gleicher oder höherer Größenordnung werden

als die reellen. Dies kann nur dann eintreten, wenn p_{12}^2 und gleichzeitig $p_{11}^2 - p_{22}^2$ sehr klein werden. Wir wollen dies näher untersuchen:

Wenden wir die Koordinatentransformation 65) auf das Indexellipsoid mit dem Hauptachsensystem x', y', z' an, so erhalten wir aus 28):

$$\begin{aligned} p_{11}^2 &= p_{x'}^2 \sin^2 \mu + p_{z'}^2 \cos^2 \mu \\ 87) \quad p_{22}^2 &= p_{x'}^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \mu + p_{y'}^2 \cos^2 \sigma + p_{z'}^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \mu \\ p_{12}^2 &= (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) \sin \sigma \sin \mu \cos \mu \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich nach leichter Umformung

$$\begin{aligned} 88) \quad p_{11}^2 - p_{22}^2 &= (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) \sin^2 \mu (1 + \sin^2 \sigma) - (p_{y'}^2 - p_{z'}^2) \\ &\quad - (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) \sin^2 \sigma \end{aligned}$$

Danach wird $p_{11}^2 - p_{22}^2$ sehr klein, wenn

$$89) \quad \sin \mu \approx \pm \sqrt{\frac{p_{y'}^2 - p_{z'}^2 + (p_{x'}^2 - p_{y'}^2) \sin^2 \sigma}{(p_{x'}^2 - p_{z'}^2) (1 + \sin^2 \sigma)}}$$

ist. Andererseits wird p_{12}^2 zufolge der dritten Gleichung in 87) unabhängig von μ ebenfalls sehr klein, wenn σ sehr klein ist. Man kann daher die Bedingung 89) näherungsweise schreiben:

$$89a) \quad \sin \mu \approx \pm \sqrt{\frac{p_{y'}^2 - p_{z'}^2}{p_{x'}^2 - p_{z'}^2}} = \sin V$$

Da die rechte Seite hiervon gleich dem Sinus des halben Winkels der optischen Achsen bei fehlender Absorption ist, erhält man als Bedingung für diejenigen Richtungen, in denen bei schwach absorbierenden Kristallen wesentlich andere als lineare Schwingungszustände auftreten:

$$90) \quad \mu \approx \pm V; \quad \sigma \approx 0$$

Der Einfluß des imaginären Teiles in 86) wird daher nur in unmittelbarer Nähe der Binormalen des Indexellipsoids bemerkenswert. Sehr nahe bei diesen liegen in schwach absorbierenden Kristallen, wie schon in Abschnitt II, C, 4 gezeigt wurde, auch die durch zirkuläre Polarisierung ausgezeichneten Windungsachsen. Es geht also die bei schwach absorbierenden Kristallen sonst im wesentlichen lineare Polarisierung in der Nähe der Windungsachsen, mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichts stark veränderlich, rasch durch zunehmend elliptische Polarisierung in den Grenzfall zirkulärer über.

Die Binormalen des Indexellipsoids haben auch bei sehr schwacher Absorption nicht die Eigenschaften wahrer optischer Achsen. Zwar werden die Brechungsindizes für die beiden Wellen gleich groß, aber ihre Absorptionskoeffizienten sind verschieden. Für rhombische Kristalle lassen sich deren Werte leicht explizit darstellen. In

solchen Kristallen gelten wegen der Übereinstimmung der Hauptachsenrichtungen x', y', z' und x'', y'', z'' für die zu einer beliebigen Richtung μ, σ gehörigen Koeffizienten q_{hk}^2 genau die zu 87) entsprechenden Beziehungen, nämlich

$$\begin{aligned} q_{11}^2 &= q_{x'}^2 \sin^2 \mu + q_{z'}^2 \cos^2 \mu \\ 91) \quad q_{22}^2 &= q_{x'}^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \mu + q_{y'}^2 \cos^2 \sigma + q_{z'}^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \mu \\ q_{12}^2 &= (q_{x'}^2 - q_{z'}^2) \sin \sigma \sin \mu \cos \mu \end{aligned}$$

In der Symmetrieebene ($x'z'$) erhält man wegen $\sigma=0$ zu einer beliebigen Richtung μ aus 84), 85) und 91) als Absorptionskoeffizienten

$$\begin{aligned} 92) \quad k_1 &= n_1^3 \left\{ \frac{k_{x'}}{n_{x'}^3} \sin^2 \mu + \frac{k_{z'}}{n_{z'}^3} \cos^2 \mu \right\} \\ k_2 &= n_2^3 \frac{k_{y'}}{n_{y'}^3} \end{aligned}$$

Hierin sind n_1 und n_2 die zu der Richtung μ gehörigen, aus dem Indexellipsoid berechneten Brechungsindizes.

Speziell in Richtung der Binormalen des Indexellipsoids wird $n_1 = n_2 = n_{y'}$ und $\mu = V$. Wegen

$$\begin{aligned} \sin^2 \mu &= \frac{n_{x'}^2}{n_{y'}^2} \cdot \frac{n_{y'}^2 - n_{z'}^2}{n_{x'}^2 - n_{z'}^2} \\ \cos^2 \mu &= \frac{n_{z'}^2}{n_{y'}^2} \cdot \frac{n_{x'}^2 - n_{y'}^2}{n_{x'}^2 - n_{z'}^2} \end{aligned}$$

erhält man dann aus 92) als Absorptionskoeffizienten in Richtung der Binormalen:

$$\begin{aligned} 93) \quad k_1 &= \frac{n_{y'}^3}{n_{x'}^2 - n_{z'}^2} \left\{ k_{x'} \frac{n_{y'}^2 - n_{z'}^2}{n_{x'}^2} + k_{z'} \frac{n_{x'}^2 - n_{y'}^2}{n_{z'}^2} \right\} \\ k_2 &= k_{y'} \end{aligned}$$

Auch noch im Schwingungszustand der Wellen unterscheiden sich die Richtungen der Binormalen bei schwacher Absorption von den Eigenschaften optischer Achsen vollkommen durchsichtiger Kristalle. Da nämlich für die Richtungen der Binormalen des Indexellipsoids bei beliebiger Symmetrie des Kristalls die Koordinaten $\mu = \pm V, \sigma = 0$ sind, ergibt sich aus 88): $p_{11}^2 - p_{22}^2 = 0$ und aus der dritten Gleichung in 87): $p_{12}^2 = 0$. Damit erhält man aus 86) in Richtung der Binormalen:

$$94) \quad \operatorname{tg} 2\varpi = \frac{2q_{12}^2}{q_{11}^2 - q_{22}^2}$$

Diese Größe ist kein unbestimmter Ausdruck und reell. Daher sind die beiden Wellen in Richtung jeder Binormale des Indexellipsoids

selbst bei schwächster Absorption immer senkrecht zueinander linear polarisiert. In dem Spezialfalle, wo die Binormalen in einer Symmetrieebene des Kristalls liegen, folgt dies auch schon aus den allgemeineren Ausführungen des Abschnitts II, C, 3. Die Binormalen vollkommen durchsichtiger und schwach absorbierender Kristalle haben also nur die eine gemeinsame Eigenschaft, daß in diesen Richtungen die Brechungsindizes der beiden Wellen gleich werden.

Im Falle rhombischer Symmetrie kann man auch für die Windungsachsen in schwach absorbierenden Kristallen Lage, Brechungsindex und Absorptionskoeffizient leicht explizit darstellen. Weil q^2 klein gegen p^2 ist, erhält man aus 69):

$$\begin{aligned}
 P_{x'}^2 &= p_{x'}^2 (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) = \frac{1}{n_{x'}^2} \left(\frac{1}{n_{x'}^2} - \frac{1}{n_{z'}^2} \right) \\
 P_{y'}^2 &= p_{y'}^2 (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) = \frac{1}{n_{y'}^2} \left(\frac{1}{n_{x'}^2} - \frac{1}{n_{z'}^2} \right) \\
 95) \quad P_{z'}^2 &= p_{z'}^2 (p_{x'}^2 - p_{z'}^2) = \frac{1}{n_{z'}^2} \left(\frac{1}{n_{x'}^2} - \frac{1}{n_{z'}^2} \right) \\
 Q_{x'}^2 &= p_{x'}^2 q_{y'}^2 - p_{y'}^2 q_{x'}^2 = \frac{2}{n_{x'}^2 n_{y'}^2} \left\{ \frac{k_{y'}}{n_{y'}} - \frac{k_{x'}}{n_{x'}} \right\} \\
 Q_{z'}^2 &= p_{z'}^2 q_{y'}^2 - p_{y'}^2 q_{z'}^2 = \frac{2}{n_{z'}^2 n_{y'}^2} \left\{ \frac{k_{y'}}{n_{y'}} - \frac{k_{z'}}{n_{z'}} \right\}
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in 73 a) ein, so findet man:

$$\begin{aligned}
 96) \quad \sigma &= \pm n_{x'} n_{z'} \frac{k_{x'} \frac{n_{y'}^2 - n_{z'}^2}{n_{x'}} + k_{y'} \frac{n_{z'}^2 - n_{x'}^2}{n_{y'}} + k_{z'} \frac{n_{x'}^2 - n_{y'}^2}{n_{z'}}}{(n_{x'}^2 - n_{z'}^2) \sqrt{(n_{x'}^2 - n_{y'}^2)(n_{y'}^2 - n_{z'}^2)}} \\
 \sin \mu &= \pm \frac{n_{x'}}{n_{y'}} \sqrt{\frac{n_{y'}^2 - n_{z'}^2}{n_{x'}^2 - n_{z'}^2}} \equiv \sin V
 \end{aligned}$$

Hierbei liegt der Winkel μ wieder in der Ebene (x' , z') und ist gegen x' gemessen. Da die Absorptionskoeffizienten nach Voraussetzung sehr klein sind, ist nach 96) der Abstand σ der Windungsachsen von der Ebene der Binormalen des Indexellipsoids ebenfalls sehr klein. Weil außerdem die Koordinate μ für die Binormalen und für die Windungsachsen denselben Wert hat, liegen in rhombischen Kristallen von schwacher Absorption je zwei der Windungsachsen mit der zugehörigen Binormale in einer Ebene und umschließen deren Richtung.

Nach 96) kann man bei schwacher Absorption die Lage der Windungsachsen in rhombischen Kristallen durch Messung der drei Hauptbrechungsindizes und der drei Hauptabsorptionskoeffizienten

leicht sehr genau bestimmen. Die Tab. 4 zeigt das Ergebnis solcher Berechnungen. Bei dem letzten Beispiel mußte wegen der schon erheblichen Größe der Absorptionskoeffizienten zur Auswertung Formel 73 a) benutzt werden. Auch liegen hier aus demselben Grunde die Binormalen des $p^2 = \text{Ellipsoids}$ nicht mehr genau mit je einem Paare der Windungsachsen in einer Ebene, vielmehr hat die Koordinate der Binormalen gegen die Achse c den Wert $58,2^\circ$.

Tab. 4. Lage der Windungsachsen in rhombischen Kristallen
Lichtart: Orange

| | μ | um die Achse | σ | gegen die Ebene |
|-----------------------------|--------------|-----------------|-------------|--------------------|
| Andalusit (Californ.) . . . | $47,7^\circ$ | a | $6,7'$ | (a c) |
| Andalusit (Tirol) | $47,7^\circ$ | a | $14,9'$ | (a c) |
| Cordierit (Madagasc.) . . . | $48,4^\circ$ | b | $14,2'$ | (b c) |
| Anhydrit (Simplotunnel) . . | $22,1^\circ$ | c | $0,1'$ | (b c) |
| Brookit (Amsteg, Uri) . . . | $8,3^\circ$ | a | $1,4'$ | (a b) |
| Antimonglanz (Shikoku) . . | $56,4^\circ$ | c | $2,7^\circ$ | (b c) |

Da nach vorstehender Tabelle in schwach absorbierenden Kristallen die Richtungen der Windungsachsen den Binormalen des Indexellipsoids sehr weitgehend benachbart sind und die Brechungsindizes in Richtung der Binormalen $n_1 = n_2 = n_{y'}$ sind, ist auch der Brechungsindex in Richtung der Windungsachsen so gut wie vollkommen genau:

$$97) \quad n = n_{y'}$$

Für den Absorptionskoeffizienten in Richtung der Windungsachsen darf man den analogen Schluß nicht machen, da die Absorptionskoeffizienten k_1 und k_2 in Richtung der Binormalen nach 93) verschieden sind. Man kann aber aus k_1 und k_2 den Wert von k in Richtung der Windungsachsen leicht berechnen: Da in Richtung der Windungsachsen nur eine Welle existiert, muß für diese Richtungen bei Auflösung der Gleichung 83) nach q^2 der Wurzel Ausdruck verschwinden. Man erhält damit für die Windungsachsen in schwach absorbierenden Kristallen

$$98) \quad q^2 = \frac{1}{2}(q_{11}^2 + q_{22}^2)$$

Nun ist nach 77) und 97):

$$98 a) \quad q^2 = \frac{2k}{n_{y'}^3}$$

ferner wegen der großen Nachbarschaft der Binormalen und Windungsachsen und zufolge 85) und 77) so gut wie vollkommen genau:

$$98 b) \quad q_{11}^2 = \frac{2k_1}{n_{y'}^3}; \quad q_{22}^2 = \frac{2k_2}{n_{y'}^3}$$

Setzt man 98 a) und 98 b) in 98) ein, so erhält man die einfache Beziehung:

$$99) \quad k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

In dem engen Bereich zwischen den Binormalen und zugehörigen Windungsachsen ändern sich also im Gegensatz zu den Brechungsindizes die Absorptionskoeffizienten, wie auch früher für die Schwingungszustände nachgewiesen, rasch. Die Folge dieser beiden Umstände ist das Auftreten der sogenannten Absorptionsbüschel, die man in der Nachbarschaft dieser Richtungen bei konoskopischem Strahlengang beobachten kann: Im unpolarisierten Licht erscheint die Spur der Binormalenebene hell und trennt zwei dunklere Büschel, welche die Richtungen mit stärkerer elliptischen Polarisierung der Wellen kennzeichnen. Der Kontrast der Helligkeiten ist in unmittelbarer Nähe der Binormalen am stärksten. Ohne Berücksichtigung der Reflexionsverluste ist bei unpolarisiertem einfallenden Licht die Intensität nach Durchschreiten der Kristallplatte in Richtung einer Binormale:

$$100) \quad J_B = \frac{J_0}{2} \left\{ e^{-4\pi k_1 \frac{d}{\lambda_0}} + e^{-4\pi k_2 \frac{d}{\lambda_0}} \right\}$$

Unter der gleichen Voraussetzung ist die Intensität nach Durchschreiten der Kristallplatte in Richtung einer Windungsachse:

$$101) \quad J_W = \frac{J_0}{2} e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} = \frac{J_0}{2} e^{-2\pi(k_1 + k_2) \frac{d}{\lambda_0}}$$

Das Verhältnis dieser beiden Intensitäten ist also

$$102) \quad \frac{J_B}{J_W} = e^{-2\pi(k_1 - k_2) \frac{d}{\lambda_0}} + e^{+2\pi(k_1 - k_2) \frac{d}{\lambda_0}}$$

Dieser Ausdruck hat im Grenzfall $(k_1 - k_2) \frac{d}{\lambda_0} = 0$ den Wert 2 und wächst sehr rasch mit der Dicke der Platte. Näher auf diese Erscheinungen einzugehen, liegt nicht in der Zielsetzung für diese Darstellung.

E. Reflexion des Lichts

1. Vollkommen durchsichtige Kristalle

Wir beziehen alle Azimute auf die Schwingungsrichtung S_E des einfallenden Lichts. Dieses setzen wir streng linear polarisiert voraus. Die Zerlegung der einfallenden Schwingung $E e^{i\Phi}$ nach ihren Komponenten parallel zu den Schwingungsrichtungen S_1 und S_2 im Kristall ergibt dann (Abb. 3):

$$103) \quad \begin{aligned} \parallel S_1: & \quad E \cos \varphi_u e^{i\Phi} \\ \parallel S_2: & \quad -E \sin \varphi_u e^{i\Phi} \end{aligned}$$

Die reflektierten Komponenten erhält man hieraus durch Multiplikation mit dem FRESNELSchen uniradialen Reflexionskoeffizienten

$$104) \quad r_\nu = \frac{n_\nu - n_0}{n_\nu + n_0} \quad \nu = 1, 2$$

wo n_ν den Brechungsindex einer in den Kristall eindringenden Welle, n_0 den Brechungsindex des Außenmediums bedeutet. Die reflektierten Komponenten sind also

$$105) \quad \begin{aligned} \| S_1: & \quad E r_1 \cos \varphi_u e^{i\Phi} \\ \| S_2: & \quad - E r_2 \sin \varphi_u e^{i\Phi} \end{aligned}$$

Damit erhält man für das Azimut ψ_r der resultierenden Schwingung gegen die Schwingungsrichtung S_E des einfallenden Lichts aus

$$106) \quad \operatorname{tg}(\varphi_u - \psi_r) = \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \varphi_u$$

nach leichter Ausrechnung:

$$107) \quad \operatorname{tg} \psi_r = \frac{\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \operatorname{tg} \varphi_u}{1 + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg}^2 \varphi_u}$$

Da die reflektierten Komponenten linear und senkrecht zueinander polarisiert sind, erhält man die Intensität der resultierenden Schwingung als Summe der Normen bzw. der Quadrate ihrer Komponenten:

$$108) \quad J = E^2 \{ r_1^2 \cos^2 \varphi_u + r_2^2 \sin^2 \varphi_u \}$$

2. Absorbierende Kristalle

Bei der Übertragung der vorstehenden Betrachtungen auf absorbierende Kristalle müssen wir statt r komplexe Reflexionskoeffizienten r und statt des Azimuts φ_u , weil die in den Kristall eindringenden Wellen im allgemeinen elliptische Schwingungszustände haben, die Richtungen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 hier also komplex sind, ein komplexes Azimut w_u einführen. Wir erhalten dann für die reflektierten Komponenten entsprechend zu 105):

$$109) \quad \begin{aligned} \| \mathfrak{S}_1: & \quad \mathfrak{R}_1 = E r_1 \cos w_u e^{i\Phi} \\ \| \mathfrak{S}_2: & \quad \mathfrak{R}_2 = - E r_2 \sin w_u e^{i\Phi} \end{aligned}$$

Mit diesen komplexen Größen können wir nun ohne weiteres die Beziehung 107) auf absorbierende Kristalle übertragen und das komplexe Azimut w_r der resultierenden Schwingung gegen die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts in der Form schreiben:

$$110) \quad \operatorname{tg} w_r = \frac{\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \operatorname{tg} w_u}{1 + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg}^2 w_u}$$

Dagegen dürfen wir die Intensitätsformel (108) nicht übertragen; denn die Intensität gleich der Summe der Normen der Komponenten zu setzen, ist nach den einleitenden Ausführungen II, A nur dann statthaft,

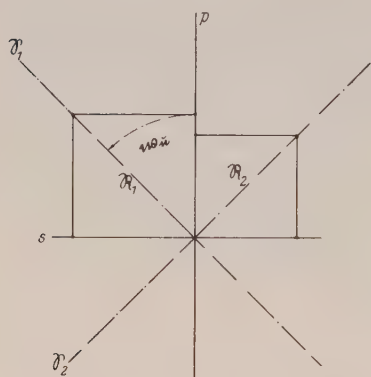


Abb. 33. Zerlegung der auf komplexe Richtungen S_1, S_2 bezogenen Komponenten R_1, R_2 nach zwei aufeinander senkrechten reellen Richtungen p, s .

wenn die Komponenten auf zueinander senkrechte reelle Richtungen bezogen sind. Die Richtungen S_1 und S_2 in (109) sind aber wegen der elliptischen Polarisation der beiden in den Kristall eindringenden Wellen im allgemeinen komplex. Daher müssen die Komponenten zunächst nochmals nach zwei aufeinander senkrechten, aber reellen Richtungen zerlegt werden. Als solche Richtungen bieten sich am natürlichsten die Richtungen parallel und senkrecht zur Schwingungsrichtung S_E des einfallenden Lichts dar. Wir erhalten durch diese nochmalige Zerlegung (Abb. 33):

$$111) \quad \begin{aligned} \parallel S_E: R_p &= E r_1 \cos^2 w_u e^{i\Phi} + E r_2 \sin^2 w_u e^{i\Phi} \\ \perp S_E: R_s &= E r_1 \cos w_u \sin w_u e^{i\Phi} - E r_2 \sin w_u \cos w_u e^{i\Phi} \end{aligned}$$

Diese Komponenten dürfen wir nun ohne die Gefahr, in der Berechnung der Intensität Fehler zu begehen, für das weitere zugrunde legen.

Zunächst stellen wir noch r , und die trigonometrischen Funktionen von w_u explizit dar. Nach Einführung des komplexen Brechungsindex erhalten wir aus (104):

$$112) \quad r = \frac{n - n_0}{n + n_0} = \frac{n - n_0 - ik}{n + n_0 - ik} = \frac{n^2 - n_0^2 + k^2 - 2in_0k}{(n + n_0)^2 + k^2}$$

Wir setzen im weiteren zur Abkürzung

$$113) \quad \frac{n^2 - n_0^2 + k^2}{(n + n_0)^2 + k^2} = N; \quad \frac{2n_0k}{(n + n_0)^2 + k^2} = K$$

und damit

$$113a) \quad r = N - iK$$

Zwischen dem komplexen Azimut w einer elliptischen Schwingung, dem reellen Azimut ψ der großen Achse der Schwingungsellipse gegen dieselbe Bezugsrichtung und der Elliptizität ϑ der Schwingung gilt die schon in (53) dargestellte allgemeine Beziehung:

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin 2\psi \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta}{1 + \cos 2\psi \cos 2\vartheta}$$

Hieraus kann man leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 w &= \frac{\cos 2\vartheta + \cos 2\psi - i \sin 2\psi \sin 2\vartheta}{2 \cos 2\vartheta} \\
 \sin^2 w &= \frac{\cos 2\vartheta - \cos 2\psi + i \sin 2\psi \sin 2\vartheta}{2 \cos 2\vartheta} \\
 \sin w \cos w &= \frac{\sin 2\psi + i \cos 2\psi \sin 2\vartheta}{2 \cos 2\vartheta}
 \end{aligned}
 \quad (114)$$

Mit Bezug auf die Formeln 111) haben wir in diesen Beziehungen alle Größen mit dem Index u zu verstehen. ψ_u ist dann das Azimut der großen Halbachse der zur Schwingungsrichtung \mathfrak{S}_1 im Kristall gehörigen Welle gegen die Schwingungsrichtung S_E des einfallenden Lichts, und ϑ_u ist die Elliptizität der Schwingungen für beide in den Kristall eindringenden Wellen.

3. Die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols

Wenn die Nicols genau gekreuzt sind, läßt der Analysator von den beiden Komponenten in 111) nur \mathfrak{R}_s durch. Die Intensität ist dann:

$$115) \quad J = \text{Norm}(\mathfrak{R}_s) = \text{Norm}\{E(r_1 - r_2) \sin w_u \cos w_u e^{i\Phi}\}$$

Nach den Ausführungen in II, A schreibt man für die Ausrechnung am besten

$$J = E^2 \text{Norm}(r_1 - r_2) \cdot \text{Norm}(\sin w_u \cos w_u) \cdot \text{Norm}(e^{i\Phi})$$

Zufolge 113 a) ist

$$\begin{aligned}
 \text{Norm}(r_1 - r_2) &= \text{Norm}\{(N_1 - N_2) - i(K_1 - K_2)\} \\
 &= (N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2
 \end{aligned}$$

Ferner wird, mit Benutzung von 114)

$$\begin{aligned}
 \text{Norm}(\sin w_u \cos w_u) &= \frac{\sin^2 2\psi_u + \cos^2 2\psi_u \sin^2 2\vartheta_u}{4 \cos^2 2\vartheta_u} \\
 &= \frac{1}{4} \{\sin^2 2\psi_u + \text{tg}^2 2\vartheta_u\}
 \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\text{Norm}(e^{i\Phi}) = 1$$

Wir erhalten also zwischen gekreuzten Nicols für den vom Analysator durchgelassenen Teil des Reflexionsvermögens

$$116) \quad R_+ = \frac{J}{E^2} = \frac{1}{4} \{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2\} (\sin^2 2\psi_u + \text{tg}^2 2\vartheta_u)$$

Mit Hilfe der Beziehungen 113) kann man noch ausrechnen:

$$117) \quad \frac{1}{4} \{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2\} = n_o^2 \frac{(n_1 - n_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}{\{(n_1 + n_o)^2 + k_1^2\} \{(n_2 + n_o)^2 + k_2^2\}}$$

Die Beziehung 116) unterscheidet sich ganz wesentlich von der für durchfallendes Licht gültigen Formel dadurch, daß in ihr ein von der Lichtwellenlänge abhängiger Interferenzfaktor entsprechend $\sin^2 \pi \frac{l}{\lambda}$ fehlt. Die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols im Auflicht sind also nicht Interferenzerscheinungen.

Beliebige Anschliffe optisch isotroper Kristalle sowie Anschliffe senkrecht zur optischen Achse einachsiger Kristalle sind wegen $N_1 = N_2$, $K_1 = K_2$ zwischen gekreuzten Nicols immer dunkel.

Bei anisotropen Anschliffen treten nach 116) Maxima der Intensität für $\psi_u = \pm 45^\circ$, also in den Diagonallagen des Anschliffs auf und haben den Wert

$$118) \quad (R_+)_{\max} = \frac{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{4 \cos^2 2 \vartheta_u}$$

Die Minimalintensitäten ergeben sich für die Azimute $\psi_u = 0^\circ, 90^\circ$, d. h. in den Normallagen des Anschliffs und haben den Wert

$$119) \quad (R_+)_{\min} = \frac{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{4} \operatorname{tg}^2 2 \vartheta_u$$

Vollständige Auslöschung in den Normallagen tritt also nur ein, wenn die in den Kristall eindringenden Wellen streng linear polarisiert sind. Der Unterschied zwischen maximaler und minimaler Intensität, also die bei raschem Drehen des Anschliffs auftretende Intensitätsänderung ist nach 118) und 119):

$$120) \quad (R_+)_{\max} - (R_+)_{\min} = \frac{1}{4} \{ (N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2 \}$$

Für Anschliffe, die genau senkrecht zu einer Windungsachse eines Kristalls von niedriger Symmetrie liegen, versagen die Formeln 118) und 119), weil wegen $\vartheta_u = 45^\circ$ und gleichzeitig $N_1 = N_2$, $K_1 = K_2$ die Größe $(R_+)_{\max}$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ und $(R_+)_{\min}$ den unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ annimmt. Es folgt aber aus 120), daß in diesem Falle bei Drehung des Anschliffs die Intensität sich nicht verändert.

In absorbierenden Kristallen zeigen die Größe N und K in der Regel eine starke Dispersion mit der Wellenlänge des Lichts. Die Intensität der Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols erweist sich daher häufig auffallend von der Wellenlänge des benutzten Lichts abhängig. Sehr deutlich tritt dies z. B. bei Rotnickelkies in Erscheinung, wo der Anisotropieeffekt zwischen gekreuzten Nicols im grünen Licht sehr auffällig, im orangefarbenen oder roten Licht dagegen nur schwach ist. Wesentlich für die Intensität der Erscheinungen ist ferner nach 117) die Proportionalität zu n_o^2 . Infolgedessen nimmt die Deutlichkeit der Anisotropieeffekte zwischen ge-

kreuzten Nicols immer zu, wenn man den Brechungsindex des Mediums, in welchem der Lichteinfall stattfindet, in Richtung Luft \rightarrow Wasser \rightarrow Öl wechselt.

Die Intensitäten zwischen gekreuzten Nicols betragen immer nur einen sehr geringen Bruchteil des Reflexionsvermögens, das man nach Ausschaltung des Analysators beobachtet. Selbst in der Diagonalstellung des Anschliffs ist die Intensität zwischen gekreuzten Nicols nur der hundertste bis tausendste oder ein noch geringerer Bruchteil der Intensität ohne Analysator. Aus diesem Grunde hat man bisher für eine zulängliche Beobachtung der Erscheinungen unter gekreuzten Nicols immer sehr intensive Lichtquellen (Bogenlampen) verwenden müssen. Demgegenüber ist im methodischen Teil gezeigt worden, wie man durch Anwendung des konoskopischen Beobachtungsverfahrens auch mit schwachen Lichtquellen, wie Glühbirnen, Spektrallampen, Monochromatoren, eine einwandfreie Beobachtung zwischen gekreuzten Nicols erzielen kann.

Die im weißen Licht zwischen gekreuzten Nicols gegebenenfalls zu beobachtenden Farben sind von anderer Wesensart als die, welche man im durchfallenden Licht zwischen gekreuzten Nicols beobachtet.

Der Interferenzfaktor $\sin^2 \pi \frac{R}{\lambda}$ bei den Erscheinungen im durchfallenden

Licht erfordert auch dann das Auftreten von Farben, und zwar in diesem Falle der reinen Interferenzfarben der NEWTONschen Skala, wenn der Schliff gar keine Dispersion der Doppelbrechung oder der Schwingungsrichtungen besitzt, allein auf Grund der Variation der

Wellenlänge, entsprechend $\frac{d}{\lambda}$. Die Dispersion von $n_1 - n_2$ modifiziert

in diesem Falle nur die Farben gegenüber denen der NEWTONschen Skala. Für die Erscheinungen im Auflicht besteht ein solcher Interferenzfaktor nicht. Mithin können hier Farben zwischen gekreuzten Nicols nur nach Maßgabe von Dispersionen auftreten, und diese Farben sind daher im Auflicht in höherem Maße für das Mineral charakteristisch. Allerdings ist es, wie schon im methodischen Teil näher ausgeführt wurde, zur einwandfreien Kennzeichnung dieser Farben erforderlich, die Aperturirisblende hinreichend zu schließen.

Wie die einzelnen Dispersionen sich auf die Veränderung des Farbtones bei Umdrehung des Anschliffs auswirken, ist leicht aus 116) und 117) ersichtlich. Deutliche Farbumschläge in der Nachbarschaft der Normallage treten in Erscheinung, wenn die Schwingungsrichtungen der in den Kristall eindringenden Wellen dispergiert sind. Umgekehrt kann aber aus der Beobachtung solcher Farbumschläge nur dann mit Sicherheit auf das Vorhandensein einer Dispersion der Schwingungsrichtungen geschlossen werden, wenn man sich davon überzeugt hat, daß die Auslöschungen genau in Intervallen von je 90° aufeinander

folgen. Anderenfalls ist die Dispersion der Schwingungsrichtungen nur vorgetäuscht und hat ihre Ursache in nachstehend behandelten Verhältnissen.

4. Die Erscheinungen zwischen nicht völlig gekreuzten Nicols

Die Schwingungsrichtung des Analysators bilde mit der des einfallenden Lichtes einen Winkel $\frac{\pi}{2} + \sigma$. Wir nehmen an, daß σ so klein ist, daß wir $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right) = -\sin\sigma = -\sigma$ im Bogenmaß setzen können. σ ist dann der Fehler in der Nicolkreuzung, positiv gerechnet entgegen der Bewegung des Uhrzeigers. Die vom Analysator durchgelassenen Anteile der Komponenten in 111) sind dann

$$\Re_p \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right) + \Re_s \sin\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right) = \Re_s - \sigma \Re_p$$

und die zugehörige Intensität ist

$$121) \quad J = \text{Norm}(\Re_s - \sigma \Re_p)$$

Hier darf nicht die Norm beider Anteile einzeln gebildet werden, da diese auf dieselbe Richtung bezogene Komponenten darstellen. Die Ausrechnung dieser Norm ist im allgemeinen Falle sehr kompliziert. Um die Verhältnisse zu überschauen, genügt es, die Lösung für den Fall zu geben, daß die in den Kristall eindringenden Wellen linear polarisiert sind. Es ist dann der Winkel w_u in 111) reell und gleich dem Azimut φ_u der einen Schwingungsrichtung im Kristall. Man erhält so nach 121) und 111) für nicht völlig gekreuzte Nicols

$$122) \quad R_{\perp} = \text{Norm}\{[N_1 - N_2 - i(K_1 - K_2)] \sin\varphi_u \cos\varphi_u - \sigma[(N_1 - iK_1) \cos^2\varphi_u + (N_2 - iK_2) \sin^2\varphi_u]\}$$

Wir fragen nun nach den Bedingungen für das Auftreten von Minimalstellen der Intensität in der Nachbarschaft der Normallagen sowie für das Auftreten eines Minimums der Intensität in einer Diagonalestellung des Anschliffs.

In der Nachbarschaft der Normallage $\varphi_u \approx 0$ wird:

$$123) \quad R_{\perp} = \text{Norm}\{[N_1 - N_2 - i(K_1 - K_2)]\varphi_u - \sigma[(N_1 - iK_1)(1 - \varphi_u^2) + (N_2 - iK_2)\varphi_u^2]\}$$

Vernachlässigen wir bei der Bildung der Norm die Glieder mit höherem als dem zweiten Grade in φ_u , so ergibt sich für kleine Fehllagen σ des Analysators als Bedingung für ein Minimum der Intensität näherungsweise:

$$124) \quad \varphi_u = \sigma \frac{N_1(N_1 - N_2) + K_1(K_1 - K_2)}{(N_1 - N_1)^2 + (K_1 - K_2)^2}$$

Analog erhalten wir in der Nachbarschaft der zweiten Normallage

$$\varphi_u \approx \frac{\pi}{2}:$$

$$125) \quad R_{\perp} = \text{Norm} \{ [N_1 - N_2 - i(K_1 - K_2) \cos \varphi_u - \sigma [(N_1 - iK_1) \cos^2 \varphi_u + (N_2 - iK_2)(1 - \cos^2 \varphi_u)]] \}$$

Werden bei der Bildung der Norm die Glieder mit höherer Potenz von $\cos \varphi_u$ als der zweiten vernachlässigt, so erhält man für kleine Fehllagen σ des Analysators als Bedingung für ein Minimum der Intensität näherungsweise

$$126) \quad \cos \varphi_u = \sigma \frac{N_2(N_1 - N_2) + K_2(K_1 - K_2)}{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}$$

Nach 124) und 126) haben also sowohl φ_u in der Nachbarschaft von $\varphi_u \approx 0$, wie auch $\cos \varphi_u$ in der Nachbarschaft von $\varphi_u \approx \frac{\pi}{2}$ bei Ein-

stellung des Anschliffs auf minimalste Helligkeit gleiches Vorzeichen; d. h. beide Einstellungen weichen im entgegengesetzten Drehsinne von der wahren Normallage ab, und zwar um nicht sehr wesentlich verschiedene Beträge. Die Auslöschungen folgen also bei Drehung des Anschliffs nicht in Intervallen von 90° wie im Falle genau gekreuzter Nicols, sondern in Intervallen, die abwechselnd um denselben Betrag gegenüber 90° zu klein und zu groß sind (Abb. 12). Dieser Betrag des Verschlagens der Auslöschungsintervalle gegen 90° ist gleich der Summe der rechten Seiten von 124) und 126), nämlich

$$127) \quad \gamma = \sigma \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}$$

Das Verschlagen kann also ein sehr hohes Vielfaches von σ betragen, so daß erhebliche Fehlorientierungen der Auslöschungen schon bei sehr kleinen Fehlern in der Nicollage auftreten können. Trotzdem lassen sich auch bei gröberer Fehlstellung der Nicols die wahren Normallagen immer sehr genau finden; denn die Halbierende zweier aufeinanderfolgender Auslöschungslagen gibt immer sehr genau die wahre Diagonallage. Es ist dies aus 124) und 126) ersichtlich: Der Fehler ζ , um den die Halbierende zweier aufeinanderfolgender Auslöschungslagen von der wahren Diagonallage abweicht, ist gleich der halben Differenz der Ausdrücke 124) und 126), also

$$128) \quad \zeta = \sigma \frac{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{2 \{ (N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2 \}} = \frac{\sigma}{2}$$

Bildet man demnach aus zwei aufeinanderfolgenden Auslöschungslagen den Mittelwert und erhöht oder erniedrigt ihn um 45° , so erhält man die wahren Normallagen bis auf den halben Fehler der Nicolkreuzung genau.

In der Diagonallage $\varphi_u = \frac{\pi}{4}$ des Anschliffs erhält man aus 122):

$$129) \quad R_{\nearrow} = \frac{1}{4} \text{ Norm } \{N_1 - N_2 - i(K_1 - K_2) - \sigma[N_1 + N_2 - i(K_1 + K_2)]\}$$

Hiernach tritt das Minimum der Intensität ein für

$$130) \quad \sigma = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$$

Es bedarf, wie ersichtlich, nur sehr kleiner Fehllagen des Analysators, um diese Bedingung zu erfüllen. Der Anschliff zeigt dann in einer Diagonallage minimalste Helligkeit bzw. Auslöschung, und es treten bei voller Umdrehung des Anschliffs nur zwei Auslöschungslagen auf (Abb. 12 b). Auch in diesem extremen Falle kann man nach dem oben angegebenen Verfahren die wahren Normallagen richtig ermitteln.

Auf die Theorie der Erscheinungen bei inhomogenen und elliptisch polarisiertem Feld einzugehen, erübrigt es sich, da die neueren mit dem Kompensationsprisma ausgerüsteten Apparaturen ein so gut wie vollkommen linear und homogen polarisiertes Feld liefern.

5. Die Erscheinungen im polarisierten Licht zwischen parallelen Nicols und solche ohne Analysator

Da in 111) die Komponenten nach reellen Richtungen dargestellt sind, können wir auch im allgemeinen Fall, in dem die in den Anschliff eindringenden Wellen elliptisch polarisiert sind, die resultierende Intensität des reflektierten Lichts ohne Analysator gleich der Summe der Normen der Komponenten ansetzen:

$$131) \quad J = \text{Norm}(\mathfrak{R}_p) + \text{Norm}(\mathfrak{R}_s)$$

Die erste Norm stellt die Intensität zwischen genau parallelen Nicols dar, die zweite die Intensität zwischen genau gekreuzten Nicols. Letztere ist schon in Abschnitt II, E, 3 durch 116) explizit ermittelt worden. Wir haben also nur noch $\text{Norm}(\mathfrak{R}_p)$ zu bestimmen und dann beide Normen zu summieren. Nach 111) ist

$$132) \quad \text{Norm}(\mathfrak{R}_p) = E^2 \text{ Norm}(r_1 \cos^2 w_u + r_2 \sin^2 w_u)$$

Aus 113 a) und 114) folgt:

$$133) \quad \begin{aligned} r_1 \cos^2 w_u &= \frac{1}{2 \cos 2 \vartheta_u} \{N_1 (\cos 2 \vartheta_u + \cos 2 \psi_u) - K_1 \sin 2 \psi_u \sin 2 \vartheta_u \\ &\quad - i [K_1 (\cos 2 \vartheta_u + \cos 2 \psi_u) + N_1 \sin 2 \psi_u \sin 2 \vartheta_u]\} \\ r_2 \sin^2 w_u &= \frac{1}{2 \cos 2 \vartheta_u} \{N_2 (\cos 2 \vartheta_u - \cos 2 \psi_u) + K_2 \sin 2 \psi_u \sin 2 \vartheta_u \\ &\quad - i [K_2 (\cos 2 \vartheta_u - \cos 2 \psi_u) - N_2 \sin 2 \psi_u \sin 2 \vartheta_u]\} \end{aligned}$$

Wenn wir die Norm der Summe der beiden Ausdrücke 133) bilden, erhalten wir nach etwas längerer Rechnung für den zwischen parallelen Nicols durchgelassenen Anteil des Reflexionsvermögens

$$\begin{aligned}
 R_{||} = \frac{\text{Norm}(R_p)}{E^2} = & \left(\frac{1 + \cos 2\varphi_u \cos 2\vartheta_u}{\cos 2\vartheta_u} \right)^2 \frac{N_1^2 + K_1^2}{4} \\
 & + \left(\frac{1 - \cos 2\varphi_u \cos 2\vartheta_u}{\cos 2\vartheta_u} \right)^2 \frac{N_2^2 + K_2^2}{4} \\
 & + (\sin^2 2\varphi_u - \text{tg}^2 2\vartheta_u) \frac{N_1 N_2 + K_1 K_2}{2} \\
 & + \sin 2\varphi_u \text{tg} 2\vartheta_u (N_1 K_2 - N_2 K_1)
 \end{aligned}
 \quad (134)$$

Es ist das also ein ziemlich komplizierter Ausdruck. Für optisch einachsige Kristalle und solche Schnitte zweiachsiger Kristalle, für die $\vartheta_u = 0$, also $\varphi_u \equiv \varphi_n$ wird, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned}
 (R_{||})_{\vartheta_u=0} = & \cos^4 \varphi_u (N_1^2 + K_1^2) + \sin^4 \varphi_u (N_2^2 + K_2^2) \\
 & + 2 \sin^2 \varphi_u \cos^2 \varphi_u (N_1 N_2 + K_1 K_2)
 \end{aligned}
 \quad (135)$$

Für $\varphi_u = 0$ resultiert also das uniradiale Reflexionsvermögen

$$R_1 = N_1^2 + K_1^2 = \frac{(n_1 - n_o)^2 + k_1^2}{(n_1 + n_o)^2 + k_1^2}
 \quad (136)$$

und für $\varphi_u = \frac{\pi}{2}$ das andere uniradiale Reflexionsvermögen

$$R_2 = N_2^2 + K_2^2 = \frac{(n_2 - n_o)^2 + k_2^2}{(n_2 + n_o)^2 + k_2^2}
 \quad (137)$$

Bei voller Drehung des Anschliffs ändert sich die Intensität viermal abwechselnd zwischen dem Maximum und Minimum, die durch R_1 bzw. R_2 gegeben sind. Der Einfluß stärkerer Elliptizität ϑ_u bei Anschliffen von Kristallen niederer Symmetrie macht sich dadurch geltend, daß die Helligkeitsunterschiede beim Drehen des Anschliffs immer mehr verschwinden. Wenn $N_1 = N_2$ und gleichzeitig $K_1 = K_2$ wird, wie es bei optisch einachsigen Kristallen in Richtung der optischen Achse, bei zweiachsigen Kristallen in Richtung einer Windungsachse stattfindet, fällt in 134) das letzte Glied fort, und aus den anderen Gliedern kann man $N^2 + K^2$ als gemeinsamen Faktor herausnehmen. Die stehenbleibende Funktionssumme von φ_u , ϑ_u reduziert sich dann, wie die Ausrechnung ergibt, auf den Wert 1. Die Intensität wird also in diesem Falle unabhängig von φ_u und ϑ_u :

$$(R_{||})_{n_1=n_2} = N^2 + K^2$$

Eine Helligkeitsänderung bei Drehung des Anschliffs tritt dann nicht auf.

Um die Intensität bei ausgeschaltetem Analysator zu erhalten, muß zu 134) noch die zwischen gekreuzten Nicols durchgelassene Intensität hinzugefügt werden, die aber schon durch 116) explizit entwickelt ist. Wir erhalten dann nach zweckmäßiger Zusammenfassung der Glieder für das Reflexionsvermögen bei ausgeschaltetem Analysator

$$\begin{aligned}
 138) \quad R = R_{||} + R_{+} = & \frac{1 + \cos 2\varphi_u \cos 2\vartheta_u}{\cos^2 2\vartheta_u} \frac{N_1^2 + K_1^2}{2} \\
 & + \frac{1 - \cos 2\varphi_u \cos 2\vartheta_u}{\cos^2 2\vartheta_u} \frac{N_2^2 + K_2^2}{2} \\
 & - \operatorname{tg}^2 2\vartheta_u (N_1 N_2 + K_1 K_2) + \sin 2\varphi_u \operatorname{tg} 2\vartheta_u (N_1 K_2 - N_2 K_1)
 \end{aligned}$$

Das Gesetz der Intensitätsänderung des Anschliffs ist also ohne Analysator in den Feinheiten anders als zwischen parallelen Nicols. Für optisch einachsige Kristalle immer und für optisch zweiachsige Kristalle, wenn $\vartheta_u = 0$ ist, erhalten wir:

$$139) \quad (R)_{\vartheta_u=0} = \cos^2 \varphi_u (N_1^2 + K_1^2) + \sin^2 \varphi_u (N_2^2 + K_2^2)$$

Die Maxima und Minima der Intensität bei Drehung des Anschliffs ergeben also auch hier die uniradialen Reflexionsvermögen. Wenn $N_1 = N_2$ und gleichzeitig $K_1 = K_2$ ist, erhält man aus 138) unabhängig von φ_u und ϑ_u :

$$(R)_{n_1=n_2} = N^2 + K^2.$$

Als mittleres Reflexionsvermögen bezeichnen wir dasjenige, das sich für die Diagonalstellung $\varphi_u = \pm \frac{\pi}{4}$ des Anschliffs ergibt. Wir wollen untersuchen, ob dieses für parallele Nicols oder ohne Analysator einen anschaulicheren Wert hat. Die Beziehungen 134) bzw. 138) lassen sich im Falle $\varphi_u = \pm \frac{\pi}{4}$ nach einigen Umformungen leicht in die Gestalt bringen

$$\begin{aligned}
 140) \quad (R)_{\varphi_u = \pm \frac{\pi}{4}} = & \pm \frac{\pi}{4} = \frac{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}{4 \cos^2 2\vartheta_u} - \operatorname{tg}^2 2\vartheta_u (N_1 N_2 + K_1 K_2) \\
 & \pm \operatorname{tg} 2\vartheta_u (N_1 K_2 - N_2 K_1) \\
 (R)_{\varphi_u = \pm \frac{\pi}{4}} = & \frac{N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2}{2 \cos^2 2\vartheta_u} - \operatorname{tg}^2 2\vartheta_u (N_1 N_2 + K_1 K_2) \\
 & \pm \operatorname{tg} 2\vartheta_u (N_1 K_2 - N_2 K_1)
 \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur im ersten Glied, und man erkennt, daß man für $\vartheta_u = 0$ ohne Analysator den Mittelwert der beiden uniradialen Reflexionsvermögen bestimmt, dagegen zwischen parallelen Nicols einen davon verschiedenen Ausdruck. Daher wollen

wir als mittleres Reflexionsvermögen \bar{R} immer das in der Diagonalestellung des Anschliffs ohne Analysator gemessene Reflexionsvermögen verstehen, wie es durch die zweite Beziehung in 140) dargestellt ist, und das für $\vartheta_u = 0$ den Wert hat:

$$140\ a) \quad \bar{R} = \frac{1}{2} (N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2) = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$$

Die Differenz der beiden uniradien Reflexionsvermögen

$$140\ b) \quad R_1 - R_2 = (N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)$$

bezeichnet man als „Doppelreflexion“.

6. Theorie der Meßmethoden zwischen gekreuzten Nicols

Die hier zu behandelnden Meßmethoden beziehen sich auf den Polarisationszustand des reflektierten Lichts und dessen Zusammenhang mit den optischen Konstanten des Anschliffs. Nach den Ausführungen in II, A kann man eine elliptische Schwingung eindeutig durch das komplexe Amplitudenverhältnis ihrer erzeugenden oder nach zwei beliebigen, aber aufeinander senkrechten Richtungen zerlegten Komponenten darstellen. Je nachdem wir dafür die uniradien Komponenten oder die parallel oder senkrecht zur Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts liegenden Komponenten wählen, können wir schreiben

$$\text{nach 109):} \quad \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} = -\frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} w_u$$

$$\text{nach 111):} \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{(r_1 - r_2) \sin w_u \cos w_u}{r_1 \cos^2 w_u + r_2 \sin^2 w_u}$$

Jede der beiden Beziehungen stellt die resultierende elliptische Schwingung vollständig dar. Der Unterschied ist nur der, daß die Richtungen der Komponenten $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ im allgemeinen komplex, dagegen die Richtungen der Komponenten $\mathfrak{R}_p, \mathfrak{R}_s$ immer reell sind. Da in der analysierenden Vorrichtung (Glimmerplättchen + Analysator) wegen der Linearität der Schwingungen die Komponentenzerlegung immer nach reellen Richtungen erfolgt, empfiehlt es sich, von den bereits nach reellen Richtungen dargestellten Komponenten $\mathfrak{R}_s, \mathfrak{R}_p$ gemäß 111) auszugehen. Schreiben wir dann die reflektierte Schwingung in der Form

$$141) \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \varepsilon + \delta i = \nu e^{i\tau}$$

so wollen wir ε als Polarisationskoeffizient, δ als Phasenkoeffizient, ν als relative Anisotropie und τ als charakteristischen Winkel des Anschliffs bezeichnen. Zwischen diesen Größen bestehen dann die Beziehungen:

$$142) \quad \varepsilon = \nu \cos \tau; \quad \delta = \nu \sin \tau; \quad \nu = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}; \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

τ ist die relative Phasendifferenz, die man den Komponenten R_s und R_p erteilen muß, um eine lineare Schwingung zu erhalten. Die Tangente ihres Azimutes gegen die Richtung von R_p ist dann gleich ν .

Wir müssen nun alle diese Größen einerseits durch die kompensierenden Einstellungen der analysierenden Vorrichtung, andererseits durch die optischen Konstanten des Anschliffs darstellen. Die Kom-

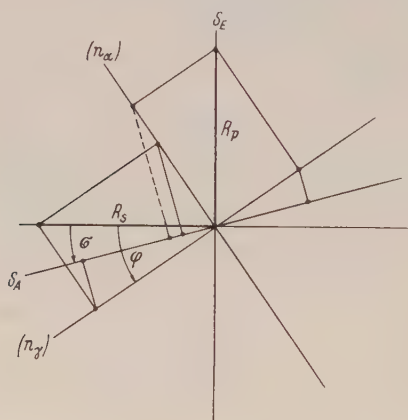


Abb. 34. Zur Wirkungsweise des Glimmerkompensators. S_E : Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts. R_p , R_s : Komponenten des reflektierten Lichts parallel und senkrecht zu S_E . (n_α) , (n_γ) : Schwingungsrichtungen im Glimmerplättchen. S_A : Schwingungsrichtung des Analysators.

ponenten R_s und R_p zerlegen wir (Abb. 34) nach den Schwingungsrichtungen (n_α) und (n_γ) im Glimmerkompensator und projizieren die nach Austritt aus dem Glimmerplättchen resultierenden Komponenten auf die Schwingungsrichtung S_A des Analysators. In der Kompensationsstellung habe das Glimmerplättchen das Azimut φ und der Analysator das Azimut σ . In dieser Stellung ist die Intensität Null, d. h. die Summe der parallel zu S_A resultierenden Komponenten muß Null sein.

Im Glimmerplättchen liege die Schwingungsrichtung (n_γ) in der Ausgangslage parallel zu S_A und S_A senkrecht zu S_E . Die Komponente von R_p parallel zu (n_α) wird, wenn (n_γ) mit der

Senkrechten zu S_E den Winkel φ bildet, $R_p \cos \varphi$. Das Glimmerplättchen erteilt den Komponenten einen relativen Gangunterschied. Der Lichtvektor in durchsichtigen Medien wird dargestellt durch

$$u = A_0 e^{i 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right)}$$

wo λ die Wellenlänge im Medium ist. Setzen wir für den Austritt des Lichts aus der Glimmerplatte $t=0$, so ist also der Schwingungszustand des Lichtvektors in diesem Augenblick gegeben durch

$u_{t=0} = A_0 e^{-2 \pi i \frac{d}{\lambda}}$. Wir erhalten demnach bei Austritt aus dem Glimmerplättchen für die Komponente parallel zu (n_α) einschließlich

der Phase: $R_p \cos \varphi \cdot e^{-2 \pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}}$, und ihre Projektion auf die Schwingungsrichtung des Analysators ist, wenn diese mit der Senkrechten zu S_E den Winkel σ bildet:

$$R_p \cos \varphi \sin (\varphi - \sigma) e^{-2 \pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}}.$$

In derselben Weise müssen wir die Zerlegung von \mathfrak{R}_p nach der Richtung (n_γ) behandeln und schließlich ebenso die Zerlegung von \mathfrak{R}_s nach den Richtungen (n_α) und (n_γ) . In der Kompensationsstellung des Glimmerplättchens und des Analysators ist die Summe der Projektionen aller vier Komponenten auf die Schwingungsrichtung des Analysators gleich Null. Wir erhalten daher die Beziehung

$$143) \quad \mathfrak{R}_p \left\{ \cos \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}} - \sin \varphi \cos(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\gamma}} \right\} \\ + \mathfrak{R}_s \left\{ \sin \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}} + \cos \varphi \cos(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\gamma}} \right\} = 0$$

Hieraus folgt

$$144) \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\sin \varphi \cos(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\gamma}} - \cos \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}}}{\cos \varphi \cos(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\gamma}} + \sin \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{-2\pi i \frac{d}{\lambda_\alpha}}}$$

Benutzt man die Beziehungen

$$\lambda_\gamma = \frac{\lambda_0}{n_\gamma}; \quad \lambda_\alpha = \frac{\lambda_0}{n_\alpha}$$

so erhält man

$$e^{2\pi i d \left(\frac{1}{\lambda_\gamma} - \frac{1}{\lambda_\alpha} \right)} = e^{2\pi i \frac{d}{\lambda_0} (n_\gamma - n_\alpha)} = e^{2\pi i \frac{\Gamma}{\lambda_0}}$$

wo Γ den Gangunterschied für die Wellenlänge λ_0 bedeutet. Man kann damit 144) auf die Form bringen

$$145) \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\sin \varphi \cos(\varphi - \sigma) - \cos \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{2\pi i \frac{\Gamma}{\lambda_0}}}{\cos \varphi \cos(\varphi - \sigma) + \sin \varphi \sin(\varphi - \sigma) e^{2\pi i \frac{\Gamma}{\lambda_0}}}$$

und erhält nach Trennung der reellen von den imaginären Bestandteilen durch Vergleich mit 141) die Beziehungen:

$$146) \quad \varepsilon = \frac{\sin 2\varphi \cos 2(\varphi - \sigma) - \cos 2\varphi \sin 2(\varphi - \sigma) \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda_0}}{1 + \cos 2\varphi \cos 2(\varphi - \sigma) + \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \sigma) \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda_0}} \\ \delta = \frac{-\sin 2(\varphi - \sigma) \sin 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda_0}}{1 + \cos 2\varphi \cos 2(\varphi - \sigma) + \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \sigma) \cos 2\pi \frac{\Gamma}{\lambda_0}}$$

Die Werte dieser Koeffizienten sind vom Azimut des Anschliffs abhängig. Wir setzen nun fest, daß die Messung immer nur in der Diagonalstellung des Anschliffs erfolgen soll. In zwei um 90° verschiedenen Diagonallagen erhalten wir dann im allgemeinen je ein anderes kompensierendes Paar φ, σ und damit nach 146) zwei im allgemeinen voneinander verschiedene Koeffizientenpaare ε, δ . Nach

114) ergeben sich nun für die trigonometrischen Funktionen von w_u in den Diagonallagen des Anschliffs folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos^2 w_u &= \frac{1}{2} (1 \mp i \operatorname{tg} 2 \vartheta_u) \\ 147) \quad \sin^2 w_u &= \frac{1}{2} (1 \pm i \operatorname{tg} 2 \vartheta_u) \\ \sin w_u \cos w_u &= \frac{\pm 1}{2 \cos 2 \vartheta_u} \end{aligned}$$

wo ϑ_u die Elliptizität der in den Anschliff eindringenden Wellen ist und die oberen Vorzeichen für die eine, die unteren für die andere Diagonallage gelten. Mittels der Beziehungen 147) und 113 a) erhält man aus 111) für die Diagonalstellungen des Anschliffs nach einigen Umformungen:

$$148) \quad \left(\frac{\Re_s}{\Re_p} \right)_{\psi_u} = \pm \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pm L \cos 2 \vartheta_u - i (\sin 2 \vartheta_u \pm M \cos 2 \vartheta_u)}$$

Hierin bedeuten L und M folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} L &= \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2} \\ 149) \quad M &= \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2} \end{aligned}$$

Aus 148) erhält man nach Sonderung der reellen von den imaginären Bestandteilen für die erste Diagonallage des Anschliffs

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{L \cos 2 \vartheta_u}{(L \cos 2 \vartheta_u)^2 + (\sin 2 \vartheta_u + M \cos 2 \vartheta_u)^2} \\ 150) \quad \delta_1 &= \frac{\sin 2 \vartheta_u + M \cos 2 \vartheta_u}{(L \cos 2 \vartheta_u)^2 + (\sin 2 \vartheta_u + M \cos 2 \vartheta_u)^2} \end{aligned}$$

und für die zweite Diagonallage des Anschliffs

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= - \frac{L \cos 2 \vartheta_u}{(L \cos 2 \vartheta_u)^2 + (\sin 2 \vartheta_u - M \cos 2 \vartheta_u)^2} \\ 151) \quad \delta_2 &= \frac{\sin 2 \vartheta_u - M \cos 2 \vartheta_u}{(L \cos 2 \vartheta_u)^2 + (\sin 2 \vartheta_u - M \cos 2 \vartheta_u)^2} \end{aligned}$$

Die Polarisationskoeffizienten und Phasenkoeffizienten sind hiermit auf die Brechungsindizes, die Absorptionskoeffizienten und den Schwingungszustand der in den Kristall eindringenden Wellen zurückgeführt.

Die Meßparameter φ , σ erfüllen die Symmetriebedingung. — In den weitaus häufigsten Fällen erweist sich zwischen den kompensierenden Einstellungen φ_1 , σ_1 in der einen

Diagonalstellung des Anschliffs und zwischen den Einstellungen φ_2, σ_2 in der anderen Diagonalstellung innerhalb der Fehlergrenzen der Messungen folgende Symmetriebedingung hinreichend erfüllt:

$$152) \quad \varphi_2 = -\varphi_1 \text{ und gleichzeitig } \sigma_2 = -\sigma_1$$

Man sieht aus 146), daß in diesem Falle auch

$$153) \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \text{ und gleichzeitig } \delta_2 = -\delta_1$$

sich ergibt. Dies kann, wie aus 150), 151) leicht ersichtlich, nur dann eintreten, wenn $\vartheta_u = 0$ ist. Es kennzeichnet also die Symmetriebedingung 152), daß die beiden in den Anschliff eindringenden Wellen linear polarisiert sind. Man erhält in diesem Falle nach leichter Ausrechnung aus 149) und 150) die expliziten Darstellungen:

$$154) \quad \varepsilon = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$$

$$\delta = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$$

und mittels der Beziehungen 142):

$$155) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}$$

$$\nu = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}}$$

Explizit in den Brechungsindizes und Absorptionskoeffizienten ergibt sich für ν :

$$155 \text{ a}) \quad \nu = n_0 \sqrt{\frac{(n_1 - n_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}{(n_0^2 - n_1 n_2 + k_1 k_2)^2 + (n_1 k_2 + n_2 k_1)^2}}$$

ν ist also proportional zum absoluten Betrage der komplexen Doppelbrechung.

In ähnlicher einfacher Weise lassen sich auch das Achsenazimut ψ_r der reflektierten Schwingungsellipse und ihre Elliptizität ϑ_r darstellen. Aus 141) erhalten wir entsprechend zu 49) und 52):

$$156) \quad \varepsilon = \nu \cos \tau = \frac{\sin 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}{1 + \cos 2\psi_r \cos 2\vartheta_r};$$

$$\delta = \nu \sin \tau = \frac{\sin 2\vartheta_r}{1 + \cos 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}$$

Die Auflösung nach ψ_r und ϑ_r ergibt unter Beachtung von 154):

$$157) \quad \operatorname{tg} 2\psi_r = \frac{2\varepsilon}{1 - \nu^2} = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{2(N_1 N_2 + K_1 K_2)}$$

$$\sin 2\vartheta_r = \frac{2\delta}{1 + \nu^2} = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2}$$

Schließlich lassen sich mit denselben Koeffizienten ε, δ auch die für die Entstehung der reflektierten Schwingungsellipse charakteristischen Elemente, nämlich das Verhältnis der beiden uniradien Reflexionsvermögen $R_2:R_1$ und die Phasendifferenz \mathcal{A}_u der beiden uniradien Komponenten einfach darstellen. Es besteht nämlich, wenn die in den Anschliff eindringenden Wellen linear polarisiert sind, die Identität:

$$158) \quad \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} e^{i\mathcal{A}_u}$$

Das Achsenazimut der resultierenden Schwingungsellipse ist, auf die Richtung der Komponente R_1 bezogen, gleich $\psi_r - \frac{\pi}{4}$. Man erhält dann entsprechend 52):

$$159) \quad \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cos \mathcal{A}_u = \frac{\sin 2\left(\psi_r - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\vartheta_r}{1 + \cos 2\left(\psi_r - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\vartheta_r} = \frac{-\cos 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}{1 + \sin 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}$$

$$\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sin \mathcal{A}_u = \frac{\sin 2\vartheta_r}{1 + \cos 2\left(\psi_r - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\vartheta_r} = \frac{\sin 2\vartheta_r}{1 + \sin 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}$$

Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich hieraus zunächst

$$160) \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - \sin 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}{1 + \sin 2\psi_r \cos 2\vartheta_r}$$

und mittels 157)

$$161) \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - 2\varepsilon + \nu^2}{1 + 2\varepsilon + \nu^2} = \frac{N_2^2 + K_2^2}{N_1^2 + K_1^2}$$

Aus 159) folgt, wenn man beide Gleichungen durcheinander dividiert,

$$\operatorname{tg} \mathcal{A}_u = -\frac{\operatorname{tg} 2\vartheta_r}{\cos 2\psi_r}$$

und hieraus erhält man mittels 157):

$$162) \quad \operatorname{tg} \mathcal{A}_u = -\frac{2\delta}{1 - \nu^2} = -\frac{N_1 K_2 - N_2 K_1}{N_1 N_2 + K_1 K_2}$$

Denken wir uns schließlich das einfallende Licht unpolarisiert, so wird das reflektierte Licht wegen des im allgemeinen verschiedenen Betrages der beiden uniradien Reflexionen teilweise polarisiert sein. Definieren wir den Polarisationsgrad

$$163) \quad p = \left| \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right|$$

so läßt sich dieser ebenfalls durch die zwischen gekreuzten Nicols ermittelten Koeffizienten ε und δ ausdrücken. Schreibt man in formaler Veränderung statt 163):

$$p = \frac{\left| 1 - \frac{R_2}{R_1} \right|}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

so folgt aus 161):

$$164) \quad p = \frac{2|\varepsilon|}{1 + \nu^2} = \frac{|(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)|}{N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2}$$

Stellen wir für die Diskussion zunächst alle diese Größen übersichtlich zusammen:

a) Polarisationskoeffizient: $\varepsilon = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$

b) Phasenkoeffizient: $\delta = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$

c) Relative Anisotropie: $\nu = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{(N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{(N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}}$

d) Charakteristischer Winkel: $\operatorname{tg} \tau = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}$

e) Achsenazimut der Schwingungsellipse:

$$165) \quad \operatorname{tg} 2\psi_r = \frac{2\varepsilon}{1 - \nu^2} = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{2(N_1 N_2 + K_1 K_2)}$$

f) Achsenverhältnis der Schwingungsellipse:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \vartheta_r; \quad \sin 2\vartheta_r = \frac{2\delta}{1 + \nu^2} = \frac{2(N_1 K_2 - N_2 K_1)}{N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2}$$

g) Verhältnis der uniradialen Reflexionsvermögen:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - 2\varepsilon + \nu^2}{1 + 2\varepsilon + \nu^2} = \frac{N_2^2 + K_2^2}{N_1^2 + K_1^2}$$

h) Phasendifferenz der uniradialen Komponenten:

$$\operatorname{tg} \mathcal{A}_u = -\frac{2\delta}{1 - \nu^2} = -\frac{N_1 K_2 - N_2 K_1}{N_1 N_2 + K_1 K_2}$$

i) Polarisationsgrad:

$$p = \frac{2\varepsilon}{1 + \nu^2} = \frac{(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2)}{N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2}$$

Prinzipiell werden die reflektierten Schwingungsellipse und damit auch die optischen Eigenschaften des Anschliffs, soweit sie für den Polarisationszustand des reflektierten Lichts maßgebend sind, durch zwei beliebige der vorstehenden 9 Parameter vollständig charakterisiert. Aber für die Schärfe einer solchen Charakteristik ist es nicht gleichgültig, welches Paar der Parameter man hierzu auswählt.

Da nämlich v^2 in der Regel so klein ist, daß es neben 1 vernachlässigt werden kann, bestehen für die Parameter 165,e bis i folgende sehr gute Näherungsbeziehungen:

$$166) \quad \psi_r = \varepsilon; \quad \vartheta_r = \delta; \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}; \quad \mathcal{A}_u = -2\delta; \quad p = 2|\varepsilon|$$

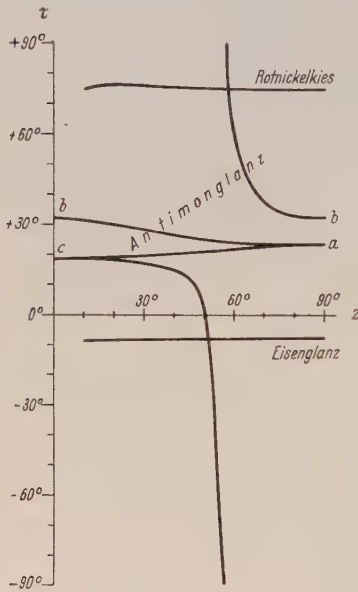


Abb. 35. Variation des charakteristischen Winkels τ mit der Anschliffrichtung. Für Eisenglanz und Rotnickelkies mißt z die Neigung der Anschliffnormale gegen die Richtung der optischen Achse. Für Antimonglanz ist die Variation von τ in den drei kristallographischen Hauptebenen gezeichnet. Die mit a, b, c beschrifteten Werte entsprechen den Richtungen der kristallographischen Hauptachsen. Die Darstellungen gelten für Na-Licht. Der Einfluß des Schleifens und Polierens ist nicht berücksichtigt.

Man erkennt hieraus, daß, wenn man sich auf die Angabe zweier Parameter beschränkt, man zweckmäßigerweise einen Parameter der Gruppe $\varepsilon, \psi_r, R_2:R_1, p$ mit einem der Gruppe $\delta, v, \tau, \vartheta_r, \mathcal{A}_u$ kombinieren muß.

Die Werte aller Parameter hängen von der Anschliffrichtung ab. Bei verschwindender Anisotropie des Anschliffs konvergieren sie gegen Null oder Eins, mit Ausnahme des Parameters τ , der in solchem Falle den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annimmt. Für

diesen Parameter besteht noch eine andere Merkwürdigkeit: Bei einachsigen Kristallen ändert sich sein Wert zufolge der Rotationssymmetrie der Indikatrix im allgemeinen nur wenig mit der Anschliffrichtung. Diese Eigenschaft kann daher zumeist als Unterscheidungsmaterial einachsiger und zweiachsiger Kristalle benutzt werden. Aus diesem Grunde kennzeichnet bei optisch einachsigen Kristallen dieser Parameter nicht nur die Eigenschaften des Anschliffs, sondern ist näherungsweise eine für den Kristall allgemein charakteristische Größe. Man erkennt dies deutlich aus der Abb. 35, wo die Variation von τ in einem Hauptschnitt von Eisenglanz

und Rotnickelkies und in den drei kristallographischen Hauptebenen von Antimonglanz berechnet ist. Für optisch zweiachsige Kristalle kann τ , mit der Anschliffrichtung wechselnd, bei demselben Kristall alle Werte zwischen -90° und $+90^\circ$ annehmen.

In den Funktionen von N und K in 165) treten größtenteils uns bereits bekannte Größen auf, und zwar nach 136), 137) die uniradialen Reflexionsvermögen:

$$N_r^2 + K_r^2 = R_r$$

nach 140 a) das mittlere Reflexionsvermögen:

$$\frac{1}{2} (N_1^2 + K_1^2 + N_2^2 + K_2^2) = R$$

nach 140 b) die Doppelreflexion:

$$(N_1^2 + K_1^2) - (N_2^2 + K_2^2) = R_1 - R_2$$

nach 140) das Reflexionsvermögen zwischen parallelen Nicols:

$$\frac{1}{4} \{ (N_1 + N_2)^2 + (K_1 + K_2)^2 \} = R_{||}$$

nach 120) die Intensität des Anisotropieeffekts zwischen gekreuzten Nicols:

$$\frac{1}{4} \{ (N_1 - N_2)^2 + (K_1 - K_2)^2 \} = (R_+)_{\max} - (R_+)_{\min}$$

Ferner bestehen Beziehungen zu den in Abschnitt II, E, 4 entwickelten Erscheinungen zwischen nicht völlig gekreuzten Nicols: Der Polarisationskoeffizient ε ist nach 165 a) und 130) numerisch gleich der Analysatordrehung im Bogenmaß, die in einer Diagonalstellung des Anschliffs ein Minimum der Intensität erzeugt. Ferner folgt aus 127) und 165 a und c) für das Verschlagen γ der Auslöschungsintervalle bei einem Fehler σ in der Nicolkreuzung die Beziehung

$$\gamma = \sigma \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma^2}$$

Man kann hiernach die Anisotropieparameter in 165) wenigstens prinzipiell auch ohne Kompensator ermitteln, indem man einmal in der Diagonalstellung des Anschliffs die Analysatordrehung $\sigma = \varepsilon$ aufsucht, die ein Minimum der Helligkeit herbeiführt, und das andere Mal zu einem beliebig vorgegebenen Fehler σ in der Analysatorstellung das Verschlagen γ der Auslöschungsintervalle bestimmt. Doch würde die Zuverlässigkeit dieses Verfahrens nicht sehr groß sein.

Schwach absorbierende und vollkommen durchsichtige Kristalle. — Wenn die Absorptionskoeffizienten sehr klein sind, kann man nach 113) setzen:

$$N = \frac{n - n_0}{n + n_0}; \quad K = 0$$

Man erhält damit aus 165 a) und 165 b):

$$167) \quad \varepsilon = \frac{n_0(n_1 - n_2)}{n_1 n_2 - n_0^2}; \quad \delta = 0$$

und hiermit unter Berücksichtigung von 146):

$$167 a) \quad \varphi = \sigma; \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \sigma$$

In solchem Falle kann man also das Glimmerplättchen ausschalten und die Messung des Parameters ε allein durch Drehung des Analy-

sators ausführen. Nach 167) wird nun bei solchen Kristallen ε sehr stark von der Höhe der Lichtbrechung im EinfallsmEDIUM abhängig. Durch Anwendung zweier verschiedener EinfallsmEDien kann man hier die Brechungsindizes n_1 und n_2 selbst bestimmen. Unterscheiden wir die beiden EinfallsmEDien durch die Brechungsindizes n'_0 und n''_0 und die zugeordneten Analysatordrehungen durch σ' und σ'' , so ergeben sich aus 167) und 167 a) zur Bestimmung der Brechungsindizes n_1, n_2 folgende quadratische Gleichungen:

$$168) \quad \begin{aligned} n_1^2 + n_1 \frac{(n_0'^2 - n_0''^2) \operatorname{tg} \sigma' \operatorname{tg} \sigma''}{n_0' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0'' \operatorname{tg} \sigma'} &= n_0' n_0'' \frac{n_0'' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0' \operatorname{tg} \sigma'}{n_0' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0'' \operatorname{tg} \sigma'} \\ n_2^2 - n_2 \frac{(n_0'^2 - n_0''^2) \operatorname{tg} \sigma' \operatorname{tg} \sigma''}{n_0' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0'' \operatorname{tg} \sigma'} &= n_0' n_0'' \frac{n_0'' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0' \operatorname{tg} \sigma'}{n_0' \operatorname{tg} \sigma'' - n_0'' \operatorname{tg} \sigma'} \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung beider Gleichungen erhält man die in I, C, 10 unter 16) und 17) wiedergegebenen Beziehungen für die Doppelbrechung $n_2 - n_1$ und für das Produkt $n_2 \cdot n_1$ der beiden Brechungsindizes.

7. Einfluß der Oberflächenschichten

Die Übergangsschichten, die sich schon nach kurzer Zeit auf frischen Bruch- und Spaltflächen von Kristallen von selbst bilden, und die bei sehr schieferm Lichteinfall den Polarisationszustand des reflektierten Lichts wie bekannt sehr stark beeinflussen, spielen bei senkrechtem Lichteinfall, wie sich erfahrungsgemäß und auch mit Hilfe der Alkemade-DRUDESCHEN Theorie dieser Übergangsschichten theoretisch erweisen läßt, so gut wie gar keine Rolle. Dagegen ist der Einfluß derjenigen Strukturveränderungen in der Oberfläche, die durch das Schleifen und Polieren erzeugt werden, auch bei senkrechtem Lichteinfall nicht zu vernachlässigen.

Eine Theorie dieser Oberflächenschichten läßt sich in Übereinstimmung mit der Erfahrung entwickeln, wenn man von Vorstellungen ausgeht, die sich aus röntgenographischen und mit Hilfe von Elektronenbeugung ausgeführten Untersuchungen ergeben haben. Hiernach ist die Struktur einer solchen Oberflächenschicht selbst gegenüber den kurzen Wellenlängen der Röntgenstrahlen und Elektronen noch durchaus als feinkristallin anzusprechen und kann daher gegenüber den großen Wellenlängen des sichtbaren Lichts erst recht als optisch isotrop und homogen angenommen werden. Eine Übergangsschicht zwischen dieser isotropen Schicht und der Grundsubstanz brauchen wir im Bereiche der sichtbaren Optik und bei senkrechtem Lichteinfall nicht zu berücksichtigen, da die Verformungen jenseits der feinkristallinen Schicht, wie aus den röntgenographischen Befunden folgt, nur einzelne Gitterkomplexe betreffen. Wir können also für

die mathematische Behandlung das in Abb. 36 dargestellte Bild näherungsweise zugrunde legen.

Die parallel bzw. senkrecht zu einer beliebigen Bezugsrichtung genommenen Komponenten der ins Außenmedium reflektierten Welle seien \mathfrak{R}'_p und \mathfrak{R}'_s . Mit den Bezeichnungen der Abb. 37 ist dann

$$169) \quad \mathfrak{R}'_p = \sum_{v=0}^{\infty} (\varrho_p)_v ; \quad \mathfrak{R}'_s = \sum_{v=0}^{\infty} (\varrho_s)_v$$

Betrachten wir nun in den Wellen ε , ϱ , δ , γ die Komponenten immer dann als positiv, wenn sie, von der Seite des Außenmediums gesehen, gleichsinnig liegen, so behalten nach dieser Festsetzung bei senkrechtem Lichteinfall sowohl alle eine Grenzschicht durchsetzenden Komponenten wie die an einem optisch dichteren Medium reflektierten Komponenten ihr Vorzeichen, dagegen kehrt sich bei senkrechtem Lichteinfall das Vorzeichen beider an einem optisch dünneren Medium reflektierten Komponenten um. Ferner sollen die Wellen δ und γ in der Oberflächenschicht immer durch diejenigen Amplituden und Phasen gekennzeichnet werden, die sie an der Grenze zwischen Außenmedium und Oberflächenschicht besitzen. Ferner seien \mathfrak{E}_p und \mathfrak{E}_s die Komponenten der einfallenden Welle, schließlich r' der Reflexionskoeffizient



Abb. 36. Zur Wirkung der Oberflächenschichten. n_0 : Brechungsindex im Außenmedium. n : komplexer Brechungsindex in der Oberflächenschicht. n_1, n_2 : komplexe Brechungsindizes in der unveränderten anisotropen Grundsubstanz.

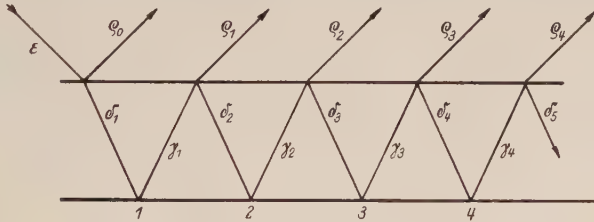


Abb. 37. Bezeichnung der bei der Reflexion auftretenden Wellen (zur Verdeutlichung für schiefen Lichteinfall dargestellt).

und δ' der Durchlässigkeitskoeffizient an der Grenze zwischen Außenmedium und Oberflächenschicht. Dann ist

$$170) \quad (\varrho_p)_{v=0} = r' \mathfrak{E}_p ; \quad (\varrho_p)_{v>0} = \delta' (\gamma_p)_v$$

$$(\varrho_s)_{v=0} = r' \mathfrak{E}_s ; \quad (\varrho_s)_{v>0} = \delta' (\gamma_s)_v$$

und man erhält aus 169):

$$171) \quad \mathfrak{R}'_p = r' \mathfrak{E}_p + \delta' \sum_{v=1}^{\infty} (\gamma_p)_v ; \quad \mathfrak{R}'_s = r' \mathfrak{E}_s + \delta' \sum_{v=1}^{\infty} (\gamma_s)_v$$

Zwischen den Wellen $(\gamma)_v$ und $(\delta)_v$ bestehen an der ersten Grenzfläche zufolge der Anisotropie der Grundsubstanz die Beziehungen

172)

$$(\gamma_p)_v = e^{-2m} \{a_{pp}(\delta_p)_v + a_{ps}(\delta_s)_v\}$$

$$(\gamma_s)_v = e^{-2m} \{a_{sp}(\delta_p)_v + a_{ss}(\delta_s)_v\}$$

Der Exponent m trägt hierbei der Phasen- und Amplitudenänderung der Wellen entsprechend ihrer Weglänge in der Oberflächenschicht Rechnung. Es ist

$$173) \quad m = 2\pi i \frac{d}{\lambda_0} n$$

wo d die Dicke der Oberflächenschicht und n ihren komplexen Brechungsindex bedeuten. Für die Reflexionskoeffizienten a an der anisotropen Grundsubstanz gelten, wie aus der Abb. 38 leicht abzuleiten ist, die Beziehungen

$$a_{pp} = r_1'' \cos^2 w_u + r_2'' \sin^2 w_u$$

$$174) \quad a_{ps} = a_{sp} = (r_1'' - r_2'') \sin w_u \cos w_u$$

$$a_{ss} = r_1'' \sin^2 w_u + r_2'' \cos^2 w_u$$

Hierin sind r_1'' und r_2'' die uniaxialen Reflexionskoeffizienten an der Grenze zwischen Oberflächenschicht und Grundsubstanz und w_u das im allgemeinen komplexe Azimut der in die Grundsubstanz ein-

Abb. 38. Zur Ableitung der vom Azimut w_u des Anschliffs und von den uniaxialen Reflexionskoeffizienten r_1'' , r_2'' abhängigen anisotropen Reflexionskoeffizienten a_{pp} , a_{ps} , a_{sp} , a_{ss} (Formel 174). p : Komponenten parallel zur Einfallsebene. s : Komponenten senkrecht zur Einfallsebene. 1, 2: Schwingungsrichtungen im Kristall.

dringenden Welle mit dem Index i gegen die Bezugsrichtung. 172) und 171) ergeben

$$175) \quad \mathfrak{R}'_p = r'_p \mathfrak{E}_p + e^{-2m} \delta' \left\{ a_{pp} \sum_{v=1}^{\infty} (\delta_p)_v + a_{ps} \sum_{v=1}^{\infty} (\delta_s)_v \right\}$$

$$\mathfrak{R}'_s = r'_s \mathfrak{E}_s + e^{-2m} \delta' \left\{ a_{sp} \sum_{v=1}^{\infty} (\delta_p)_v + a_{ss} \sum_{v=1}^{\infty} (\delta_s)_v \right\}$$

Ferner bestehen an der ersten Grenzfläche noch die Beziehungen

$$176) \quad (\delta_p)_{v=1} = \delta' \mathfrak{E}_p ; \quad (\delta_p)_{v>1} = -r'(\gamma_p)_{v-1}$$

$$(\delta_s)_{v=1} = \delta' \mathfrak{E}_s ; \quad (\delta_s)_{v>1} = -r'(\gamma_s)_{v-1}$$

Damit wird aus 175):

$$177) \quad \mathfrak{R}'_p = r'_p \mathfrak{E}_p + e^{-2m} \delta' \left\{ \delta' (a_{pp} \mathfrak{E}_p + a_{ps} \mathfrak{E}_s) - r' \left(a_{pp} \sum_{v=2}^{\infty} (\gamma_p)_{v-1} + a_{ps} \sum_{v=2}^{\infty} (\gamma_s)_{v-1} \right) \right\}$$

$$\mathfrak{R}'_s = r'_s \mathfrak{E}_s + e^{-2m} \delta' \left\{ \delta' (a_{sp} \mathfrak{E}_p + a_{ss} \mathfrak{E}_s) - r' \left(a_{sp} \sum_{v=2}^{\infty} (\gamma_p)_{v-1} + a_{ss} \sum_{v=2}^{\infty} (\gamma_s)_{v-1} \right) \right\}$$

Jetzt können wir eine Rekursion anwenden; denn einerseits besteht die Identität

$$\sum_{r=2}^{\infty} (\gamma)_{r-1} \equiv \sum_{r=1}^{\infty} (\gamma)_r$$

und andererseits ist nach 171):

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\gamma)_r = \frac{\mathfrak{R}' - r' \mathfrak{E}}{\delta'}$$

Damit erhalten wir an Stelle von 177):

$$\begin{aligned} 178) \quad \mathfrak{R}'_p &= r' \mathfrak{E}_p + e^{-2m} \{(\delta'^2 + r'^2)(a_{pp} \mathfrak{E}_p + a_{ps} \mathfrak{E}_s) - r'(a_{pp} \mathfrak{R}'_p + a_{ps} \mathfrak{R}'_s)\} \\ \mathfrak{R}'_s &= r' \mathfrak{E}_s + e^{-2m} \{\delta'^2 + r'^2)(a_{sp} \mathfrak{E}_p + a_{ss} \mathfrak{E}_s) - r'(a_{sp} \mathfrak{R}'_p + a_{ss} \mathfrak{R}'_s)\} \end{aligned}$$

Nun gilt auch für absorbierende Medien die Beziehung

$$\delta'^2 + r'^2 = 1$$

Man kann damit die Beziehungen 178) in der Form schreiben

$$\begin{aligned} 179) \quad (1 + r' a_{pp} e^{-2m}) \mathfrak{R}'_p + r' a_{ps} e^{-2m} \mathfrak{R}'_s &= r' \mathfrak{E}_p + e^{-2m} (a_{pp} \mathfrak{E}_p + a_{ps} \mathfrak{E}_s) \\ r' a_{sp} e^{-2m} \mathfrak{R}'_p + (1 + r' a_{ss} e^{-2m}) \mathfrak{R}'_s &= r' \mathfrak{E}_s + e^{-2m} (a_{sp} \mathfrak{E}_p + a_{ss} \mathfrak{E}_s) \end{aligned}$$

Hieraus kann man leicht \mathfrak{R}'_p und \mathfrak{R}'_s explizit darstellen; doch sind für die folgenden Diskussionen die Beziehungen in der Form 179) geeigneter.

Ist in der Zwischenschicht nd groß gegen λ_0 , so daß nach 173) m groß wird, so werden in 179) die mit e^{-2m} multiplizierten Glieder klein gegen die andern, und man erhält im Grenzfalle für sehr großes nd :

$$\mathfrak{R}'_p = r' \mathfrak{E}_p; \quad \mathfrak{R}'_s = r' \mathfrak{E}_s$$

Es erfolgt also in diesem Grenzfalle die Reflexion allein nach Maßgabe der Oberflächenschicht, und die Anisotropieeigenschaften der Grundsubstanz treten nicht in Erscheinung. Bei den für die Erzmikroskopie angewandten Schleif- und Polierverfahren sind wir offenbar von diesem Grenzfall noch sehr weit entfernt.

Uns interessieren insonderheit die Erscheinungen in den Hauptazimuten der Grundsubstanz, nämlich in ihren Normallagen und in ihren Diagonallagen. Setzen wir die einfallende Welle als linear polarisiert voraus und legen die Bezugsrichtung wie früher parallel zur Schwingungsrichtung der einfallenden Welle, dann wird

$$\mathfrak{E}_p = E; \quad \mathfrak{E}_s = 0$$

Nehmen wir ferner auch die in die Grundsubstanz eindringenden Wellen als linear polarisiert an, was reelle Azimute w_u bedeutet, so ist nach 174) in der Normallage $w_u = 0$:

$$a_{pp} = r''_1; \quad a_{ps} = a_{sp} = 0; \quad a_{ss} = r''_2$$

und in der Normallage $w_u = \frac{\pi}{2}$:

$$a_{pp} = r_2''; \quad a_{ps} = a_{sp} = 0; \quad a_{ss} = r_1''$$

Dann erhalten wir für die beiden Normallagen aus 179):

$$180) \quad \text{für } w_1 = 0: \quad \frac{\Re'_p}{E} = \Re'_1 = \frac{r' + r_1'' e^{-2m}}{1 + r' r_1'' e^{-2m}}; \quad \frac{\Re'_s}{E} = 0$$

$$\text{für } w_1 = \frac{\pi}{2}: \quad \frac{\Re'_p}{E} = \Re'_2 = \frac{r' + r_2'' e^{-2m}}{1 + r' r_2'' e^{-2m}}; \quad \frac{\Re'_s}{E} = 0$$

Wegen $\Re'_s = 0$ sind also die Reflexionen in beiden Normallagen uniradial, d. h. die Auslöschungslagen zwischen gekreuzten Nicols werden durch die Oberflächenschicht nicht verändert.

Die Beträge des Reflexionsvermögens ergeben sich im allgemeinen Falle aus 180) durch Bildung der Normen. Die so erhaltenen Ausdrücke lassen sich jedoch kaum diskutieren. Man erhält aber eine übersichtliche Darstellung, wenn man beachtet, daß im Mikroskop bei orthoskopischer Beobachtung die Interferenzen der Strahlen gleicher Neigung im Anschliff nicht zur Beobachtung gelangen. Dann läßt sich folgende Ungleichung aufstellen

$$181) \quad \text{Norm} \left(\frac{r' + r_v''}{1 + r' r_v''} \right) > \text{Norm} \left(\frac{r' + r_v'' e^{-2m}}{1 + r' r_v'' e^{-2m}} \right) > \text{Norm} \left(\frac{r' + r_r''}{1 + r' r_r''} e^{-2m} \right)$$

Da für die Reflexionskoeffizienten r' und r_v'' die Beziehungen gelten

$$182) \quad r' = \frac{n - n_0}{n + n_0}; \quad r_v'' = \frac{n_v - n}{n_v + n}$$

erhält man

$$183) \quad \text{Norm} \left(\frac{r' + r_v''}{1 + r' r_v''} \right) = \text{Norm} \left(\frac{n_v - n_0}{n_v + n_0} \right) = \text{Norm}(\Re_v) = R_v$$

Die erste Norm in 181) ist also gleich dem uniradialen Reflexionsvermögen R_v bei fehlender Oberflächenschicht. Die zweite Norm in 181) ist nach 180) gleich dem uniradialen Reflexionsvermögen R'_v bei vorhandener Oberflächenschicht, und schließlich ist die dritte Norm in 181) wegen 183):

$$\text{Norm} \left(\frac{r' + r_v''}{1 + r' r_v''} e^{-2m} \right) = R_v \text{Norm} \left(e^{-2m} \right)$$

Nun folgt aus 173):

$$184) \quad \text{Norm}\left(e^{-2m}\right) = \text{Norm}\left\{e^{-4\pi i \frac{d}{\lambda_0}(n-ik)}\right\} = e^{-8\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Man erhält somit für 181):

$$185) \quad R_v > R'_v > R_v e^{-8\pi k \frac{d}{\lambda_0}}; \quad v=1,2$$

und entsprechend für das mittlere Reflexionsvermögen

$$186) \quad R > \overline{R'} > \overline{R} e^{-8\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Das Reflexionsvermögen wird also durch das Schleifen und Polieren immer herabgesetzt. Es bleibt aber höher als der durch $R e^{-8\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$ gegebene Grenzwert. Absorptionsfreie Oberflächenschichten ergeben demnach den Idealwert des Reflexionsvermögens wie bei fehlender Oberflächenschicht, wenigstens solange der Brechungsindex in der Reihenfolge Außenmedium \rightarrow Oberflächenschicht \rightarrow Grundsubstanz anwächst. Härtere Mineralien werden im allgemeinen eine dünnere Oberflächenschicht und damit eine geringere Beeinflussung des Reflexionsvermögens erweisen, vorausgesetzt, daß nicht ein hoher Absorptionskoeffizient das Produkt kd in 186) stark erhöht. Es empfiehlt sich daher, als Eichbasis für die Messung des Reflexionsvermögens ein Mineral mit kleinem Absorptionskoeffizienten zu wählen. Die gelbe Zinkblende ist dafür sehr geeignet, weil sie einerseits einen so kleinen Absorptionskoeffizienten hat, daß ein nennenswerter Einfluß des Schleifens und Polierens nicht zu befürchten ist, und andererseits ihr Reflexionsvermögen wegen des hohen Brechungsindex noch groß genug ist, um eine sichere Basis für die Messungen abzugeben.

Den Einfluß der Oberflächenschichten auf die Anisotropieparameter, die zwischen gekreuzten Nicols gemessen werden, erhält man, wenn in 174) $w_u = \frac{\pi}{4}$ gesetzt wird. Das ergibt zunächst für die Reflexionskoeffizienten

$$\alpha_{pp} = \alpha_{ss} = \frac{1}{2}(r_1'' + r_2''); \quad \alpha_{ps} = \alpha_{sp} = \frac{1}{2}(r_1'' - r_2'')$$

Hiermit erhält man für $\mathfrak{E}_p = E$ und $\mathfrak{E}_s = 0$ aus 179) wenn man dort einmal beide Gleichungen addiert und das andere Mal die Gleichungen voneinander subtrahiert:

$$187) \quad \begin{aligned} \left\{1 + r_1' r_1'' e^{-2m}\right\} (\mathfrak{R}'_p + \mathfrak{R}'_s) &= E (r_1' + r_1'' e^{-2m}) \\ \left\{1 + r_2' r_2'' e^{-2m}\right\} (\mathfrak{R}'_p - \mathfrak{R}'_s) &= E (r_1' + r_2'' e^{-2m}) \end{aligned}$$

Die Elimination von \Re'_p und \Re'_s hieraus liefert:

$$188) \quad \begin{aligned} \frac{\Re'_p}{E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{r' + r'_1 e^{-2m}}{1 + r' r'_1 e^{-2m}} + \frac{r' + r'_2 e^{-2m}}{1 + r' r'_2 e^{-2m}} \right\} = \frac{\Re'_1 + \Re'_2}{2} \\ \frac{\Re'_s}{E} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{r' + r'_1 e^{-2m}}{1 + r' r'_1 e^{-2m}} - \frac{r' + r'_2 e^{-2m}}{1 + r' r'_2 e^{-2m}} \right\} = \frac{\Re'_1 - \Re'_2}{2} \end{aligned}$$

Setzen wir nun gemäß 141):

$$\frac{\Re'_s}{\Re'_p} = \frac{\Re'_1 - \Re'_2}{\Re'_1 + \Re'_2} = \varepsilon' + \delta' i$$

und entsprechend bei fehlender Oberflächenschicht

$$\frac{\Re_s}{\Re_p} = \frac{\Re_1 - \Re_2}{\Re_1 + \Re_2} = \varepsilon + \delta i$$

so ergibt sich mit Hilfe von 188) nach leichter Ausrechnung

$$189) \quad \frac{\varepsilon' + \delta' i}{\varepsilon + \delta i} = e^{-2m} \frac{2r'(1 + r'_1 r'_2) + (r'_1 + r'_2)(1 + r'^2)}{2r'(1 + r'_1 r'_2 e^{-4m}) + (r'_1 + r'_2)(1 + r'^2) e^{-2m}}$$

Statt dieser strengen Beziehung wollen wir im Folgenden die für unsere Zwecke ausreichende Annäherung benutzen:

$$190) \quad \varepsilon' + \delta' i = (\varepsilon + \delta i) e^{-2m}$$

Unter Berücksichtigung von 173) ergibt die Entwicklung dieses Ausdrucks

$$\begin{aligned} \varepsilon' + \delta' i &= (\varepsilon + \delta i) e^{-4\pi i n \frac{d}{\lambda_0}} e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} \\ &= e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} (\varepsilon + \delta i) \left(\cos 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} - i \sin 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} \right) \end{aligned}$$

Die Sonderung der reellen von den imaginären Bestandteilen liefert

$$191) \quad \begin{aligned} \varepsilon' &= e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} \left\{ \varepsilon \cos 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} + \delta \sin 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} \right\} \\ \delta' &= e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} \left\{ \delta \cos 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} - \varepsilon \sin 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} \right\} \end{aligned}$$

Der Einfluß der Oberflächenschicht auf die Koeffizienten ε und δ hängt also außer von den Konstanten d , n , k in der Oberflächenschicht wesentlich noch von den Vorzeichen von ε und δ und von der Größe dieser Koeffizienten ab. Solange $\cos 4\pi n \frac{d}{\lambda_0}$ nicht sehr

von 1 verschieden ist, wird bei kleinen Werten von δ der Koeffizient ε nur wenig, dagegen der Koeffizient δ erheblich durch die Oberflächenschicht beeinflusst. Nach Entwicklung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen kann man unter Voraussetzung sehr kleiner Dicken an Stelle von 191) auch schreiben

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon - 4\pi \frac{d}{\lambda_0} (k\varepsilon - n\delta) \\ \delta' &= \delta - 4\pi \frac{d}{\lambda_0} (n\varepsilon + k\delta) \end{aligned}$$

Für die relative Anisotropie ν ergibt sich aus 191)

$$192) \quad \nu' = \sqrt{\varepsilon'^2 + \delta'^2} = e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}} \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2} = \nu \cdot e^{-4\pi k \frac{d}{\lambda_0}}$$

Sie wird also durch das Schleifen und Polieren immer herabgesetzt, und zwar nach Maßgabe der Dicke und des Absorptionskoeffizienten der Oberflächenschicht.

Für den charakteristischen Winkel τ erhält man aus 142):

$$\operatorname{tg}(\tau' - \tau) = \frac{\operatorname{tg} \tau' - \operatorname{tg} \tau}{1 + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \tau'} = \frac{\frac{\delta'}{\varepsilon'} - \frac{\delta}{\varepsilon}}{1 + \frac{\delta\delta'}{\varepsilon\varepsilon'}} = \frac{\varepsilon\delta' - \varepsilon'\delta}{\varepsilon\varepsilon' + \delta\delta'}$$

Hieraus folgt mit 191) nach leichter Rechnung:

$$\begin{aligned} 193) \quad \operatorname{tg}(\tau' - \tau) &= \operatorname{tg} 4\pi n \frac{d}{\lambda_0} \\ \text{d. h. } \tau' &= \tau - 4n \frac{d}{\lambda_0} \pi \end{aligned}$$

Der charakteristische Winkel wird also durch die Oberflächenschicht immer in negativer Richtung verändert, und zwar nach Maßgabe der Dicke und des Brechungsindex der Oberflächenschicht. Wie aus 193) ersichtlich ist, wird τ' in der Regel erheblich von τ verschieden sein.

Für das Verhältnis der beiden uniradien Reflexionsvermögen erhält man aus 166) nach leichter Umformung:

$$194) \quad \frac{R_2'}{R_1'} = \frac{1 - 2\varepsilon'}{1 + 2\varepsilon'} = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} + \frac{4(\varepsilon - \varepsilon')}{(1 + 2\varepsilon)^2} = \frac{R_2}{R_1} \{1 + 4(\varepsilon - \varepsilon')\}$$

Solange ε keine wesentlichen Veränderungen erfährt, gilt dasselbe auch für $R_2:R_1$. Unter Voraussetzung sehr kleiner Dicken erhält man mit Hilfe von 191 a):

$$194 a) \quad \frac{R_2'}{R_1'} = \frac{R_2}{R_1} \left\{ 1 + 16\pi \frac{d}{\lambda_0} (k\varepsilon - n\delta) \right\}$$

Auf die weiteren Anisotropieparameter brauchen wir nicht einzugehen, da sie nach 166) durch die vorstehend behandelten Parameter näherungsweise miterledigt sind.

Diejenigen Parameter, welche mit zunehmender Dicke der Oberflächenschicht eine besonders starke Veränderung erfahren, insonderheit also der Parameter τ , erleiden zufolge $\frac{d}{\lambda_0}$ in solchem Falle auch erhebliche Fälschungen ihrer Dispersion.

Tabelle 5. Antimonglanz. Osram-Na-Dampf-Lampe.

1. Frische Spaltfläche ¹⁾.
2. Vorsichtig geschliffen und poliert ²⁾.
3. Kräftig nachpoliert.
4. Gewaltsam trocken poliert.

| Mittleres Reflexionsvermögen (photometrisch) | | \bar{R} | 1. 0,421 | 2. 0,402 | 3. 0,368 | 4. 0,344 |
|--|---|-----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Zwischen gekreuzten Nicols | Fehler gegen die Symmetriebedingungen | $\frac{a_1 + a_2}{2} - a_0$ | + 0,01° | + 0,01° | + 0,02° | — 0,01° |
| | | $\frac{g_1 - g_2}{2} - g_0$ | — 0,01° | — 0,04° | + 0,01° | + 0,03° |
| | Polarisationskoeffizient | ε | + 0,0274 | + 0,0281 | + 0,0290 | + 0,0158 |
| | Phasenkoeffizient | δ | + 0,0179 | + 0,0091 | + 0,0028 | — 0,0020 |
| | Relative Anisotropie | ν | + 0,0327 | + 0,0295 | + 0,0291 | + 0,0159 |
| | Charakteristischer Winkel | τ | + 33,2° | + 17,9° | + 5,5° | — 7,2° |
| | Verhältnis der unira- dialen Reflexionsver- mögen | $R_2 : R_1$ | 0,896 | 0,894 | 0,890 | 0,939 |
| | Konstanten der Ober- flächenschicht | $k d$ | . | 4,8 $m\mu$ | 5,5 $m\mu$ | 33,7 $m\mu$ |
| | | $n d$ | . | 12,5 $m\mu$ | 22,7 $m\mu$ | 33,1 $m\mu$ |

Die in der Tab. 5 dargestellten Messungen erweisen am Beispiel von Antimonglanz die mit wachsender Beanspruchung durch das Schleifen und Polieren erzeugten Veränderungen der wichtigsten Reflexionsparameter. Das Reflexionsvermögen wird zunehmend herabgesetzt. Der Schwingungszustand der in den Anschliff eindringenden Wellen wird, da die Abweichungen gegen die Symmetriebedingungen ganz innerhalb der Fehlgrenzen der Messungen liegen, immer richtig wiedergegeben. Von den Anisotropieparametern zeigen in Überein-

¹⁾ Ergibt auch noch nach Tagen und Wochen die bei senkrechtem Lichteinfall gemessenen Anisotropieparameter unverändert.

²⁾ Auch hier bleiben die Parameter, wenn nicht nachpoliert wird, noch nach vielen Monaten unverändert.

stimmung mit den theoretischen Ausführungen ε und $R_2:R_1$ die geringsten Beeinflussungen. Erst eine gewaltsam durchgreifende Bearbeitung wirkt hier in stärkerem Maße schädigend. Für den Parameter ε ist das zunächst erfolgende mäßige Ansteigen und erst später mit zunehmender Bearbeitung einsetzende starke Abfallen nicht das Ergebnis einer Fehlmessung, sondern entspricht nach den optischen Konstanten des Antimonglanzes vollkommen der Theorie. Dasselbe gilt hinsichtlich des Ganges von $R_2:R_1$. Starke Beeinflussungen erweisen sich, ebenfalls in Übereinstimmung mit der Theorie, für die Parameter δ und τ . Da im vorliegenden Falle δ erheblich kleiner als ε ist, sind die Veränderungen, die der Parameter ν erfährt, analog zu ε relativ gering.

In den beiden letzten Reihen der Tabelle sind die aus den Veränderungen der Parameter errechneten Konstanten k_d und n_d der Oberflächenschicht angegeben. Man kann diese Konstanten prinzipiell aus irgend zwei der Anisotropieparameter berechnen. Am einfachsten ist es, dafür ν und τ , d. h. die Formeln 192) und 193) zu benutzen. Die so berechneten Werte k_d und n_d stellen Grenzwerte für die Dicke der Oberflächenschicht dar. Da $n > 1$ ist, wird n_d ein oberer Grenzwert für die Dicke der Schicht, und da für Antimonglanz $k < 1$ ist, wird k_d ein unterer Grenzwert für die Dicke der Oberflächenschicht. Ihre wahre Dicke liegt also im vorliegenden Falle zwischen k_d und n_d . Die aus der Messung der Anisotropieparameter errechneten Beträge liegen ganz im Bereiche derjenigen, die aus röntgenographischen Untersuchungen für die Dicke der feinkristallinen Oberflächenschicht solcher geschliffener und polierter Anschliffe bestimmt worden sind.

Alphabetisches Sachregister

- Absorptionsbüschel 74
 Absorptionshauptachsen 51
 Absorptionsindex 48
 Absorptionskoeffizient
 Definition 4, 48
 Messung 36, 42
 Berechnung 54, 58, 68, 71, 74
 Anisotropieeffekt 15, 27, 78, 85
 Anisotropieparameter 27, 30, 91, 99
 Apertur 11, 23
 Auslöschungsrichtungen 16, 78, 80, 98

 Binormalen 70
 Bireflexion, siehe Doppelreflexion
 Brechungsindex
 komplexer 49
 Messung 33, 36, 94
 Berechnung 54, 58
 homogener Wellen 55
 Charakteristischer Winkel 28, 85, 91, 101

 Diagonallage 26
 Doppelreflexion 9, 35, 85, 93

 Eichbasis 37, 99
 Elliptizität 56
 Extinktionskoeffizient 48

 Fortpflanzung des Lichts 4, 49, 67
 FRESNELSches Gesetz 5, 59, 68

 Immersion 17, 33, 78
 Indikatrix 4, 49, 68

 Interferenzerscheinungen 78

 Kompensationsprisma 15
 Kompensator 18, 21, 86
 Konoskop 23, 38

 Lichtquellen 21, 23, 79
 Lichtschwächung 4, 47

 Mikrophotometer 36, 40, 43
 Mikroskop 20

 Nicols
 gekreuzte 15, 77
 nicht völlig gekreuzte 16, 80
 parallele 9, 82
 Norm 45

 Oberflächenschichten 29, 40, 94
 Opakilluminator 20
 Strahlengang 11
 Prisma 12, 15
 Optische Achsen 5, 61, 70

 Phasendifferenz
 allgemeines 46
 uniradialer Komponenten 8, 28, 91
 kompensierende 18, 28
 charakteristische 28, 92, 101
 im Prisma 12
 Phasenkoeffizient 27, 85, 87, 91, 100
 Photozelle 40, 44
 Polarisation, siehe Schwingungszustand.
 Polarisationsgrad 9, 27, 90
 Polarisationskoeffizient 27, 85, 87, 91, 100

 Polarisationshauptachsen 51

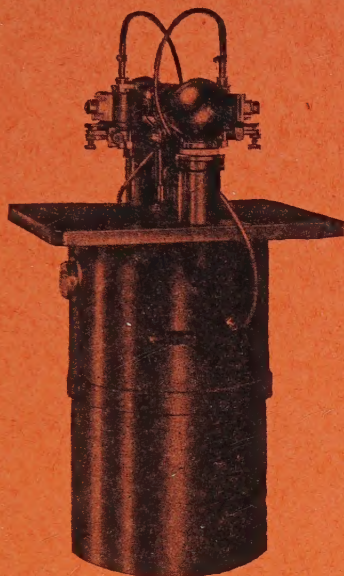
 Reflexion
 an durchsichtigen Medien 7, 74
 an absorbierenden Medien 7, 75
 Reflexionsdichroismus 9
 Reflexionskoeffizient 75, 96
 Reflexionsvermögen
 uniradiales 9, 28, 35, 83, 91, 99
 mittleres 9, 84, 99
 Messung 34
 Relative Anisotropie 28, 85, 91, 101

 Schwingungsrichtungen 26, 55, 58
 Schwingungszustand
 einfallender Wellen 10
 eindringender Wellen 5, 26, 55, 58, 63, 69, 71
 reflektierter Wellen 7, 8, 91
 teilweise Polarisation 7, 9, 27, 90
 homogene Polarisation 10, 15, 16
 Symmetrie 4, 6
 Symmetriebedingung 26, 88

 uniradial 7, 9

 Windungsachsen
 Definition 5, 62
 Lage 5, 63, 73
 Brechungsindex 67, 73
 Absorptionskoeffizient 67, 73
 optische Polarität 66

Der neue **Mikro-Röntgen-Apparat**



f. Feinstruktur-Untersuchungen
in Labor und Betrieb

Seine Vorzüge:

An jede Lichtsteckdose wie eine elektrische Tischlampe anzuschließen.

Auf jedem Arbeitstisch aufzustellen.

Hochspannungs- u. strahlensicher, also gefahrlos.

Er leistet mehr als seine großen Vorgänger.

Er liefert **Cu., Fe., Mo., Co.-** und **W.-Strahlung.**

Seine Verwendbarkeit ist also **vielseitig**, seine Handhabung **einfach.**

C. H. F. MÜLLER A.-G. HAMBURG
ZENTRALVERWALTUNG BERLIN, Abtlg.
Material-Untersuchung - BERLIN NW 40,
HINDERSINSTRASSE 14

Süddeutsche Mineralienzentrale

Dipl.-Ing. W. Maucher

München 13 (Bayern) Schellingstraße 73

Mineralien: Schaustücke, Handstücke, lose Kristalle.

Geschlossene Sammlungen in jedem Umfang und nach jedem gewünschten Gesichtspunkt.

Lagerstättenmaterial: Einzelne Belegstücke und ganze Sammlungen aller wichtigeren Lagerstättentypen und der bekanntesten Vorkommen.

Analysenmaterial: Hüttenprodukte und Mineralien in reinen, ausgesuchten Stücken für Uebungen in Lötrohrprobierkunde, Probierkunde und anorganischer Chemie.

Gesteine: Handstücke der wichtigsten Gesteinsarten und Belegstücke für allgemeine Geologie.

Versteinerungen: Große Auswahl in Fossilien aller Formationen, besonders aus dem Unterdevon des Hunsrücks.

Schmucksteine: roh und geschliffen.

Detektormineralien: im Großen und einzeln. Woodmetall.

**Geologenhammer, Meisel, Härteskalen, Strichtafeln,
Anlegegoniometer, Lötrohrbedarfsartikel.**

Einkauf.

Ansichtssendungen franko gegen franko.

Tausch.

Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie u. Petrographie

Herausgegeben im Auftrag der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft

von

Prof. Dr. **G. Linck**, Jena (Bd. 1—6),

Prof. Dr. **A. Johnsen**†, Berlin (Bd. 7—10),

Prof. Dr. **W. Eitel**, Berlin (Bd. 10—18),

Prof. Dr. **C. W. Correns**, Rostock (ab Bd. 19)

| | RM |
|---|-------|
| 1. Band. Mit 53 Abbild. im Text. IV, 290 S. gr. 8° 1911 | 9.— |
| 2. Band. Mit 23 Abbild. im Text. IV, 304 S. gr. 8° 1912 | 10.50 |
| 3. Band. Mit 26 Abbild. im Text. IV, 320 S. gr. 8° 1913 | 10.— |
| 4. Band. Mit 23 Abbild. im Text. IV, 384 S. gr. 8° 1914 | 12.50 |
| 5. Band. Mit 43 Abbild. im Text. III, 324 S. gr. 8° 1916 | 11.50 |
| 6. Band. Mit 46 Abbild. im Text. IV, 245 S. gr. 8° 1920 | 8.— |
| 7. Band. Mit 23 Abbild. im Text. XI, 480 S. gr. 8° 1922 | 12.50 |
| 8. Band. Mit 33 Abbild. im Text. III, 234 S. gr. 8° 1923 | 8.— |
| 9. Band. Mit 17 Abbild. im Text. III, 411 S. gr. 8° 1924 | 14.— |
| 10. Band. Mit 69 Abbild. im Text. III, 310 S. gr. 8° 1925 | 14.— |
| 11. Band. Mit 72 Abbild. im Text u. auf 1 Tafel. III, 358 S. gr. 8° 1927 | 17.— |
| 12. Band. Mit 66 Abbild. i. Text u. 1 Porträttafel (G. Linck). IV, 336 S. gr. 8° 1927 | 20.— |
| 13. Band. Mit 103 Abbild. im Text. IV, 320 S. gr. 8° 1929 | 20.— |
| 14. Band. 1. Teil. IV, 74 S. gr. 8° 1929 | 5.— |
| 14. Band. 2. Teil. Mit 37 Abbild. u. 6 Tabellen. IV, 217 S. gr. 8° 1930 | 15.— |
| 15. Band. 1. Teil. Mit 1 Abbild. im Text. III, 72 S. gr. 8° 1931 | 5.— |
| 15. Band. 2. Teil. Mit 7 Abbild. im Text. IV, 140 S. gr. 8° 1931 | 10.— |
| 16. Band. 1. Teil. Mit 29 Abbild. im Text. IV, 146 S. gr. 8° 1931 | 10.— |
| 16. Band. 2. Teil. Mit 25 Abbild. im Text. IV, 65 S. gr. 8° 1932 | 5.— |
| 17. Band. 1. Teil. Mit 5 Abbild. im Text. IV, 74 S. gr. 8° 1932 | 5.— |
| 17. Band. 2. Teil. Mit 37 Abbild. im Text. IV, 90 S. gr. 8° 1933 | 7.— |
| 18. Band. 1. Teil. Mit 2 Abbild. im Text. IV, 68 S. gr. 8° 1933 | 4.50 |
| 18. Band. 2. Teil. Mit 16 Abbild. im Text. IV, 200 S. gr. 8° 1934 | 15.— |
| 19. Band. 1. Teil. Mit 5 Abbild. im Text. IV, 72 S. gr. 8° 1935 | 5.— |
| 19. Band. 2. Teil. Mit 19 Abbild. im Text. IV, 226 S. gr. 8° 1935 | 18.— |
| 20. Band. 1. Teil. IV, 142 S. gr. 8° 1936 | 12.— |
| 20. Band. 2. Teil. Mit 75 Abbild. im Text. IV, 314 S. gr. 8° 1936 | 22.— |
| 21. Band. 1. Teil. Mit 16 Abbild. im Text. IV, 168 S. gr. 8° 1937 | 13.20 |
| 21. Band. 2. Teil. Mit 7 Abbild. u. 10 Tabellen. IV, 238 S. gr. 8° 1937 | 19.50 |

Mitglieder der D. M. G. erhalten die Bände zu Vorzugspreisen.